

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICHIGAN

ANNALEN DER PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,
P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 81 HEFT 5
DER GANZEN REIHE 386. BANDES 5. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1926 erscheinen die Bände 79, 80 und 81 à 8 Hefte. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 20.— zuzüglich Rm. —.80 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 1.60 für das Ausland.

Redaktions-schluß am 18. Oktober 1926.

Inhalt

	Seite
1. M. A. Bontsch - Bruewitsch. Die Strahlung der komplizierten rechtwinkligen Antennen mit gleichbeschaffenen Vibratoren .	425
2. Erich Marx. Reaktionskonstanten, Verweilzeiten, Rekombinationen und Wechselzahlen in Flammgasen und die Sättigungsspannungen der Charakteristik	454
3. Max Neunhöffer. Beiträge zur Theorie des kontinuierlichen Anteils der Röntgenstrahlen	493
4. Albrecht Dieterich. Über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Quarz, Flußspat und Gips . . .	523

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Kolberger Straße 16.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie gehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 81

1. Die Strahlung der komplizierten rechtwinkligen Antennen mit gleichbeschaffenen Vibratoren;

von M. A. Bontsch-Bruewitsch

I. Der Strahlungswiderstand

a) Als eine komplizierte Antenne wird hier ein Luftdraht bezeichnet, der aus einer Anzahl von Vibratoren und einem System der Leiter besteht, mit deren Hilfe die Energie zugeführt wird. Als „rechtwinklige“ sind vom Verfasser alle Antennen genannt, deren Drähte nur nach drei zueinander senkrechten Richtungen angeordnet sind. Dabei fallen die Achsen der strahlenden Vibratoren mit einer von diesen Richtungen zusammen.

Man kann den Strahlungswiderstand R einer Antenne dieser Art im allgemeinen als Verhältniss der ausgestrahlten Leistung P zum Quadrat der Strömensumme in Bauchstellen von Vibratoren definieren. Im Falle von n gleichbeschaffenen Vibratoren, die durch gleiche Ströme belastet sind, ist dieser Widerstand:

$$(1) \quad R = \frac{P}{(n i)^2}.$$

Die Verluste verteilen sich im allgemeinen ungleichmäßig zwischen den einzelnen Vibratoren. Manchmal aber ist es praktisch vorteilhafter mit einem mittleren Werte des Strahlungswiderstandes jedes Vibrators zu tun zu haben, der folgendermaßen bestimmt wird:

$$(2) \quad r = \frac{P}{n i^2} = n R.$$

Ehe wir zu der vom Antennensystem ausgestrahlten Leistung übergehen, wollen wir folgenden Umstand betonen. Wenn r_0 — der Strahlungswiderstand eines einzelnen isoliert gedachten Vibrators ist und r — der entsprechende Widerstand desselben Vibrators im Falle der Zusammenwirkung mit

anderen Vibratoren der komplizierten Antenne ist, so wird $r_0 \pm r$ solange zwischen den Vibratoren eine gegenseitige Wirkung stattfindet, die neue elektromotorische Kräfte hervorrufen.

Man kann diese elektromotorischen Kräfte ganz unabhängig von der Strahlungsverteilung berechnen und demgemäß ist r ohne Kenntnis der ausgestrahlten Leistung zu bestimmen. Andererseits ist es bei der Bestimmung des Widerstandes nach der ausgestrahlten Leistung notwendig und genügend nur diese Leistung zu finden. Von diesem Standpunkte ist die Verteilung der Strahlung im Raume ganz belanglos. Diese Verteilung kann durch irgendwelche sekundäre Ursachen beliebig verändert werden, der Widerstand der Antenne verändert sich aber nicht, wenn die ausgestrahlte Leistung dieselbe bleibt. Mit anderen Worten der Widerstand bleibt derselbe, solange keine Gegenwirkung seitens eines Systems, das die Verteilung der Strahlung im Raume beeinflußt, auf den Luftleiter ausgeübt wird.

Diese Bemerkung ist wesentlich in Beziehung der Wirkung der Erde, die immer mehr oder weniger die Verteilung der Strahlung der Antenne beeinflußt. Der Einfluß der Erde auf den Strahlungswiderstand kann nur im Falle einer wesentlichen Nähe der Antenne zur Erde merklich werden.

Man nimmt oft bei Berechnung des Strahlungswiderstandes eines Leiters die Erde für einen vollkommenen Leiter an, die Antenne wird dabei als ganz nahe zur Erde gespannt betrachtet.¹⁾ Das entspricht in keinem Falle der wirklichen Sachlage bei kurzen Wellen, da diesenfalls die Antenne hoch über die Erde aufzuheben zweifellos vorteilhaft ist, und die Erde kann selbst angenähert nicht als ein vollkommener Leiter betrachtet werden.

Man kann diese Fehler vermeiden, indem man die Erde, als einen zur Antenne äußeren Spiegel annimmt, der auf irgendeine Weise angeordnet ist und ein bestimmtes Absorptionsvermögen besitzt. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise ist die Möglichkeit die Widerstandsberechnungen sowie

1) B. van der Pol jun., Jahrb. d. d. T. 13. S. 229. 1919; S. Balandin, Proc. J. R. E. Dezember 1924. S. 833.

die Analyse der Strahlungsverteilung auf beliebige reelle Fälle anzuwenden.

Bei Berechnung der Leistung nehmen wir erstens an, daß der Luftdraht weit von der Erde entfernt ist. Der Einfluß der Erde wird später eingeführt.

Zur Berechnung wird folgende Methode angewendet:

Stellen wir uns vor, daß eine Anzahl von Dipolen von verschwindenden Dimensionen im Abstand von $\frac{1}{2}$ Wellenlänge voneinander im Mittelpunkte einer Kugel angeordnet sind, deren Halbmesser so groß ist, daß man die Dimensionen des Dipolensystems vernachlässigen kann. Die Vibratoren sind der Achse SS_1 entlang verteilt (Fig. 1) und die Achsen von

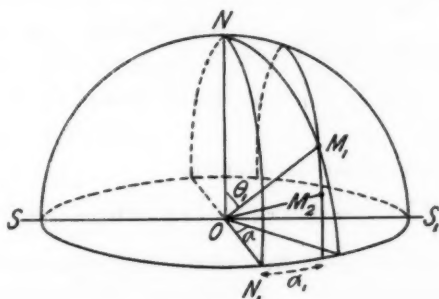


Fig. 1.

Vibratoren sind senkrecht zur Äquatorialebene der Kugel gerichtet. Als Koordinaten eines Punktes M_1 wählen wir den Polaren Abstand θ zwischen M_1 und N und Azimut α aus, der von der Meridianebene $NN_1 \perp SS_1$ abgezählt wird.

Da der Halbmesser der Kugel sehr groß angenommen ist im Verhältnis zu den Dimensionen des Dipolensystems, so kann man die Geraden, die von verschiedenen Dipolen zu M_1 gerichtet sind als zueinander parallel betrachten.

Es ist angenommen, daß die Schwingungen von Dipolen mit gleicher Phase vor sich gehen und dieselben Momente besitzen. Die Amplitude des magnetischen Vektors, der von jedem Dipol an der Oberfläche der Kugel hervorgerufen wird, sei $h_0 = f(\alpha, \theta)$. Dann wird am Punkte M_1 mit den Koordinaten

α_1, θ_1 die magnetische Komponente des Poyntingschen Vektors vom ersten Dipol:

$$h_0 \sin(\omega t) = f(\theta_1, \alpha_1) \sin \omega t.$$

Die entsprechende Komponente vom zweite Dipole wird

$$h_0 \sin(\omega t + \beta),$$

wo β der Phasenverschiebung entspricht, die wegen des Gangunterschiedes l (Fig. 2) entsteht:

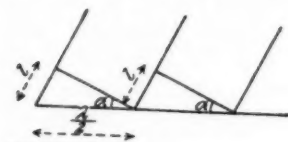


Fig. 2.

$$\beta = \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

Dritter Dipol wird

$$h_0 \sin(\omega t + 2\beta)$$

gegeben usw.

Der resultierende Vektor wird:

$$H_0 \sin \left\{ \omega t + \frac{\beta(n-1)}{2} \right\} = h_0 \{ \sin(\omega t) + \sin(\omega t + \beta) + \dots + \sin[\omega t + \beta(n-1)] \}.$$

Indem man die Reihenentwicklung

$$\frac{\sin(nx) \cdot \sin(n-1)x}{\sin x} = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \dots + \sin 2x(n-1)$$

anwendet und ωt gleich Null setzt, erhält man das Verhältnis der Amplitude oder der quadratischen Mittelwerte des resultierenden Vektors zur Summe von Amplituden oder von quadratischen Mittelwerten der Komponenten:

$$(3) \quad \frac{H_0}{h_0} = \frac{H}{h} = \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = Y_1.$$

Diese Größe wird Phasenfaktor genannt, und die diesen Faktor bestimmende Funktion $Y = \psi(\alpha, \theta)$, als Phasenfunktion bezeichnet. Die Form dieser Funktion hängt von der Zahl und von der Anordnungsweise der Vibratoren ab. Jetzt werden wir zeigen, daß in allen Punkten des Bogens des kleinen Kreises der senkrecht zur Achse SS_1 steht, der Phasenfaktor derselbe ist.

Ein Bogen dieser Art sei durch M_1 gelegt. Nehmen wir einen zweiten Punkt M_2 auf diesem Bogen (Fig. 1 und 3),

so schließt OM_2 mit der Richtung SS_1 denselben Winkel wie OM_1 ein, deswegen ist es klar, daß die Phasenverschiebung zwischen den Vektoren von zwei benachbarten Vibratoren dieselbe bleibt wie im vorangehenden Falle. Dementsprechend:

$$H'_0 \sin \left[\omega t + \gamma + \frac{\beta}{2} (n-1) \right] = h'_0 \left[\sin (\omega t + \gamma) + \sin (\omega t + \gamma + \beta) + \dots + \sin [\omega t + \gamma + \beta (n-1)] \right].$$

Daraus:

$$(4) \quad \frac{H'}{h'} = \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = Y_1.$$

Jetzt wollen wir zeigen, daß im Falle eines geradlinigen Drahtes mit symmetrisch zum Mittelpunkt verteilten Strom-

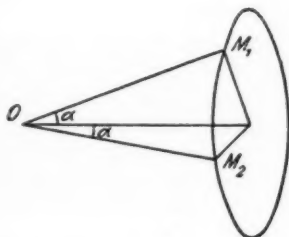


Fig. 3.

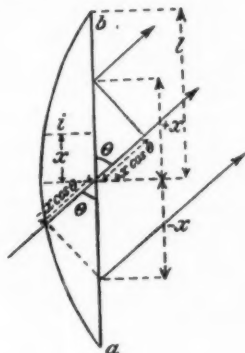


Fig. 4.

elementen die Phase des Vektors, der von der ganzen Antenne erzeugt wird, mit der Phase zusammenfällt, die von zwei gleich weit von den Enden des Drahtes abstehenden Elementen entsteht.

Die Amplitude des Stromes längs $2l$ des Leiters ab (Fig. 4) sei durch eine Funktion $i_0 = f(x)$ bestimmt, wo x dem Abstände vom Mittelpunkte des Drahtes entspricht. Der magnetische Vektor in irgendeinem entfernten Punkte M , dessen zugehöriger Kugelradius einen Winkel θ mit der Achse einschließt, wird:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} h &= A \int_0^l f(x) [\sin(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t - \varphi)] dx = \\ &= \left[2A \int_0^{+l} f(x) \cos \varphi dx \right] \sin(\omega t) = \beta \sin(\omega t) \end{aligned} \right.$$

hier ist

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \theta.$$

Elementarvektor von einem Element des Leiters dx (bei $x = 0$) an demselben Punkte M wird:

$$(6) \quad dh = [A f(0) \cdot dx] \sin(\omega t) = \beta_1 \sin(\omega t).$$

Durch Vergleich von (5) und (6) sieht man, daß die Vektoren sich zwar durch die Amplituden unterscheiden, jedoch dieselbe Phase besitzen.

Demgemäß kann man beim Aufsuchen der Phasenfunktion die Antennen (die den gemachten Voraussetzungen genügen) durch Dipole ersetzen, die im Mittelpunkt der Antennen angeordnet sind. Man muß diesen Dipolen die Phase des mittleren Teiles des Drahtes zuschreiben.

Es sei die geradlinige Antenne aus einigen identischen Elementen gebaut, deren Mitten denselben Abstand d voneinander haben, dabei sei vorausgesetzt, daß in den Grenzen jedes Elements die Bedingung der symmetrischen Verteilung des Stromes erfüllt ist. Wir ersetzen jeden Abschnitt durch einen Dipol, der im Mittelpunkte sich befindet. Der resultierende Vektor wird:

$$H \sin \left(\frac{n-1}{2} \beta \right) = h (\sin \beta + \sin 2\beta + \dots + \sin (n-1)\beta),$$

wo n die Zahl der Elemente ist, h der Vektor von jedem Dipole,

$$\beta = \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta + \zeta \right)$$

der Winkel der Phasenverschiebung zwischen den Komponentenvektoren, ζ der Winkel der Phasenverschiebung zwischen den Strömen von zwei benachbarten Dipolen. Bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ wird $\beta = \zeta$ und die Phasenverschiebung des Stromes wird im resultierenden Dipole im Mittelpunkt der Antenne in Beziehung zum 1-ten Elemente gleich $\frac{(n-1)}{2} \zeta$.

Infolgedessen kann man beim Ermitteln der Phasenfunktion für ein System von Antennen dieser Art jeden Luftdraht durch einen Dipol ersetzt denken, der im Zentrum desselben angeordnet ist und dessen Stromphase

$$(7) \quad \Delta = \gamma + \frac{(n-1)}{2} \zeta$$

ist, wo γ die Stromphase im ersten Teile der Antenne bedeutet.

b) Es sei ein System von n vertikalen Vibratoren von der Länge $\lambda/2$ auf einer horizontalen Linie angeordnet. Der Abstand zwischen den Vibratoren sei $\lambda/2$. Alle Vibratoren haben dieselbe Phase der Schwingungen. Dieses System sei im Zentrum einer großen Kugel gedacht (Fig. 1), die Achsen von allen Vibratoren seien zum Pole N gerichtet und die Linie, die die Mitten der Vibratoren vereinigt fällt mit dem Durchmesser SS_1 zusammen, für den $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ist.

Wie bekannt, ist für die Leiter von der Länge $\lambda/2$ die Amplitude des magnetischen Vektors an der Kugeloberfläche:

$$(8) \quad h = \frac{2i}{\varrho c_0}.$$

i die Stromstärke im Strombauch, ϱ der Kugelhalbmesser, c_0 Lichtgeschwindigkeit.

Im Falle von n gleichabstehenden Vibratoren im Mittelpunkt der Kugel wird $H = nh \psi(\theta, \alpha)$. Indem man zum Poyntingschen Vektor übergeht und über die Kugeloberfläche integriert, erhält man die gesamte Leistung der Strahlung:

$$P = \frac{n^2 i^2}{c_0 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \psi^2(\theta, \alpha) \cdot d\alpha \cdot d\theta$$

hier ist i in e. s. abs. Einheiten ausgedrückt. Zum Übergange zu den praktischen Einheiten muß man die rechte Seite mit $30 c_0$ multiplizieren, dann wird P in Watt sein.

Der Widerstand des ganzen Systems wird augenscheinlich $R = \frac{P}{(ni)^2}$, die Leistung einer einzelnen Antenne $p = \frac{P}{n}$ und deren Widerstand (als Mittelwert) $r = \frac{P}{ni^2}$. Alle Zahlenwerte sind weiter für diese letzte Größe angeführt.

Wir wollen jetzt die Phasenfunktion aufsuchen. Es ist selbstverständlich, daß im Punkte N_1 auf dem Äquator mit den Koordinaten $\alpha_1 = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ sich die magnetischen Vektoren algebraisch zusammensetzen, da bei genügender Kugelgröße der Phasenunterschied gleich Null wird. Der mittlere quadratische Wert des resultierenden magnetischen Vektors in diesem Punkte sei $H = nh$, wo h die Größe des Vektors von einem einzelnen Vibrator bedeutet.

Wenn man nun dem Äquator entlang sich bewegt, so wird der Veränderung von α_1 entsprechend, sich auch der resultierende Vektor verändern, da Phasenunterschiede zwischen den Feldern eintreten, die von einzelnen Vibratoren hervorgerufen sind.

Die Phasenverschiebung zwischen den Vektoren von zwei benachbarten Vibratoren wird:

$$\beta = \frac{2\pi l}{\lambda} \sin \alpha_1 = \pi \sin \alpha_1.$$

Mit Hilfe der Gleichung (3) wird:

$$(9) \quad \frac{H}{h} = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2} \sin \alpha_1\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha_1\right)}.$$

Das ist der Phasenfaktor für die Äquatorialpunkte.

Zur Bestimmung des Phasenfaktors in einem beliebigen Punkte M der Kugel genügt es, die Äquatorialkoordinate α_1 des Bogens des kleinen Kreises zu finden, der durch diesen Punkt hindurchgeht und in einer zur Achse SS_1 senkrechten Ebene liegt. Die gefundene Größe muß man in (9) einsetzen.

Indem man M auf die Ebene (Fig. 5) projiziert, erhält man $OM = \rho \sin \theta$, wo ρ der Halbmesser der Kugel ist; weiter, wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, wird:

$$(10) \quad \sin \alpha_1 = \sin \theta \cdot \sin \alpha.$$

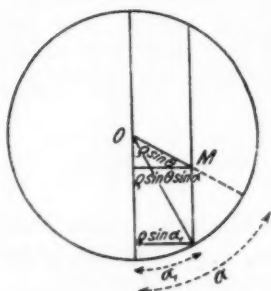


Fig. 5.

Durch Einsetzung dieser Beziehung in (9) erhalten wir die gesuchte Funktion für die Kugeloberfläche:

$$(11) \quad Y_2 = \frac{\sin \left(\frac{\pi n}{2} \sin \alpha \cdot \sin \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha \cdot \sin \theta \right)}.$$

Die von dem betrachteten System ausgestrahlte Leistung ist:

$$(12) \quad P = \frac{60 i^2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} y_2^2 \cdot d\alpha d\theta.$$

Die angenäherte graphische Berechnung gibt:

n	2	3	4	5
r	58	62	57	70 Ω

Bei einer großen Zahl von Antennen wird die gesamte Strahlung praktisch in Grenzen eines schmalen Ringes konzentriert, der durch zwei Bogen der kleinen Kreise bestimmt wird, die in den dem Hauptmeridiane (Fig. 6) parallelen Ebenen liegen.

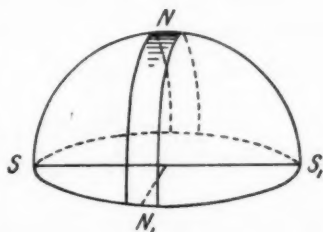


Fig. 6.

Indem man angenähert die Oberfläche dieses Ringes als Zylinder betrachtet und $\sin \alpha = \alpha$ annimmt, erhält man:

$$(13) \quad H = \frac{2(n i)}{c_0 p} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{\frac{\pi}{2} \alpha}.$$

Wegen der Kleinheit von α hängt dabei die Phasenfunktion von θ nicht ab und

$$dP = 2\pi \rho^2 \cdot \frac{c_0 H^2}{4\pi} d\alpha \cdot d\theta.$$

Daraus, indem man zu den praktischen Einheiten übergeht, erhält man:

$$(14) \quad P = \frac{60 n^2 i^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} d\theta \cdot 2 \int_0^{+\frac{2}{n} \kappa} \frac{\sin^2 \frac{\pi n \alpha}{2}}{\left(\frac{\pi n \alpha}{2} \right)^2} d\alpha.$$

Die Grenzen des zweiten Integrals sind folgendermaßen zu bestimmen. Der Grenze des Hauptstrahls entspricht die Bedingung $\alpha = \frac{2}{n}$, da dabei die Subintegralfunktion zum ersten Male durch Null durchläuft. Die nächsten Strahlen werden durch die Zonen bestimmt für die $\alpha = \frac{4}{n}, \frac{6}{n} \dots$ ist.

Da die Energie der Seitenstrahlen bei höheren Nummern von Strahlen sehr schnell abfällt, so kann man eine willkürliche Zahl κ von Strahlen untersuchen und die Energie der übrigen vernachlässigen.

Dabei bleibt κ/n klein, da n beliebig groß ausgewählt werden kann.

Es sei $\frac{\pi n \alpha}{2} = z$, dann:

$$(15) \quad P = \frac{120 i^2 n}{\pi^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} d\theta \cdot 2 \int_0^{\kappa \pi} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz.$$

Das erste Integral kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$(16) \quad \int_0^{\pi} \sqrt{1 - u^2} \cos(\pi u) du,$$

es ist eine Besselsche Funktion J_1 , deren Wert aus den Tabellen¹⁾ entnommen werden kann. Ihre Größe ist etwa 1,4.

Das zweite Integral kann in ein Integralsinus umgeformt werden mit doppelten Grenzen und, da κ groß ist, ist es angenähert $\pi/2$ gleich. Demgemäß wird

$$r \sim 56 \Omega.$$

c) Jetzt wollen wir eine Antenne von derselben Art betrachten, in der aber in benachbarten vertikalen Drähten die Phasen um 180° verschoben sind. Diese Antenne gibt den

1) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln.

Hauptstrahl in der Richtung der Basislinie. Um ein Maximum der Strahlung bei $\alpha = 0$ zu erhalten, sei die Basislinie senkrecht zur Achse SS_1 gerichtet. Man kann zeigen, daß in diesem Fall die Phasenfunktion

$$(17) \quad Y_3 = \frac{\sin \left[\frac{\pi n}{2} (1 - \cos \alpha \cdot \sin \theta) \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha \cdot \sin \theta) \right]}$$

und dementsprechend die Leistung

$$(18) \quad P = \frac{60 i^2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \cdot y^2_3 d\theta d\alpha$$

sein werden. Die angenäherte graphische Ausrechnung gibt:

n	2	3	4
r	88	95	100 Ω

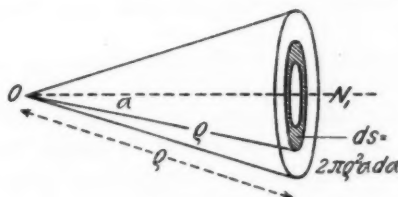


Fig. 7.

Bei einem großen Werte von n , kann der Ausdruck (18) durch einen einfacheren ersetzt werden.

Im betrachteten System sind die Haupt- und Seitenstrahlen durch Kegeln begrenzt, deren Scheitel im Mittelpunkte der Kugeln liegen und deren Achsen mit der Basislinie der Antennen zusammenfällt.

Durchschnittskurven dieser Kegel mit der Kugel bilden die Kreise (Fig. 7). Im Teile der Kugeloberfläche, der durch einen solchen Kreis begrenzt ist der den α -Strahlen entspricht, kann man den Poyntingschen Vektor konstant und gleich $\Pi = \frac{(n i)^2}{c_0 \rho^2 \pi}$ annehmen, $\sin \alpha$ kann angenähert durch α ersetzt werden.

Indem man die ganze Oberfläche in Ringe $ds = 2\pi \rho^2 \alpha d\alpha$ teilt, erhält man

$$dP = \Pi \cdot ds \cdot Y_4^2.$$

Die Phasenfunktion kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$Y_4 = \frac{\sin \left[\frac{\pi n}{2} (1 - \cos \alpha) \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha) \right]} = \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi n \alpha^2}{4} \right)}{\left(\frac{\pi n \alpha^2}{4} \right)^2} = \frac{\sin^2 \kappa}{\kappa^2}.$$

Dann

$$(19) \quad P = \frac{240 n i^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \kappa}{\kappa^2} d\kappa.$$

Das gibt, dem obengesagten gemäß, bei großen κ

$$\kappa \sim 120 \Omega.$$

d) Jetzt werden noch zwei Arten von vielstöckigen Antennen behandelt, die aus vertikalen Vibratoren von der Länge $\lambda/2$ zusammengesetzt sind und nach derselben Achse gerichtet sind.

In den Antennen der ersten Art existieren die Schwingungen aller Vibratoren mit derselben Phase, in denen der zweiten sind die Phasen der benachbarten Leiter um 180° verschoben. Es ist klar, daß auch bei dieser vertikalen Anordnung der Antennen die vorangehenden Überlegungen über die Phasenfunktion ihre Gültigkeit nicht verlieren. Der Unterschied besteht nur darin, daß in diesem Fall die Zonen mit demselben Phasenfaktor, nicht in vertikalen, sondern in horizontalen Ebenen liegen, die der Äquatorialebene parallel sind.

Deswegen hängt die Strahlungsverteilung nicht vom Azimut, sondern nur vom Polarabstand ab.

In Analogie zu den früheren Überlegungen erhält man für diese synphase Antenne:

$$(20) \quad P = 60 i^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi n}{2} \cos \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)} d\theta = M.$$

Durch Reihenentwicklung:

$$\frac{\sin^2(n x)}{\sin x} = \sin x + \sin 3x + \sin 5x \dots + \sin(2n-1)x$$

bei $x = \frac{\pi}{2} \cos \theta$ und durch die Beziehung $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ kann man das Integral (20) folgendermaßen darstellen:

$$(21) \quad M = N_1 + N_2 + \dots + N_n$$

wo

$$N_n = A_n \int_0^\pi \frac{\cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta.$$

Es sei $\cos \theta = y$

$$N_n = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2} y \right)}{1 - y^2} dy = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos^{2n} \left(\frac{\pi}{2} y \right)}{1 + y} dy.$$

Weiter durch Bezeichnung

$$z = \frac{\pi}{2} (1 + y)$$

erhält man:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} N_n &= \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} z}{z} dz = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2^{2n-2}} \left[\int_0^\pi \frac{\sin^2 z}{z} dz - 2 \int_0^\pi \frac{\sin^4 z}{z} dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cdot 2 \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2} \int_0^\pi \frac{\sin^6 z}{z} dz - \dots \pm B \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} z}{z} dz \right]. \end{aligned} \right.$$

Indem man zur Verkürzung

$$(23) \quad \int_a^\pi \frac{\sin^2 z}{z} dz = S_a^\pi$$

einführt und $N_1, N_2 \dots$ durch S ausdrückt, kann das Integral M auf folgende Weise umgeformt werden:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= (-1)^{n-1} 60 i^2 \left[S_0^\pi - 4 S_0^\pi + \right. \\ &\quad \left. + 8 S_0^\pi - 12 S_0^\pi \dots \pm 4(n-1) S_0^\pi \right]. \end{aligned} \right.$$

Durch Anwendung der Lösung von van der Pol erhält man:

$$(25) \quad S_0^\pi = \frac{1}{2} [E + \lg_e 2a\pi - Ci 2a\pi],$$

wo E die Eulersche Konstante 0,577... ist und Ci Integralcosinus, dessen Größe für alle Bogen die gleich $2n\pi$ (n ganze Zahl) sind, sich sehr wenig von Null unterscheidet.

Nach der Formel (24) sind folgende Zahlenwerte gefunden:

n	2	3	4	5
r	98	103	106,5	108,5 Ω

Die Werte von r bei sehr großen n können folgendermaßen gefunden werden.

Die Grenze des Winkels, der κ -Strahlen umfaßt, wird durch die Bedingung $\cos \theta = \frac{2\kappa}{n}$ bestimmt, die Größe von κ kann beliebig groß ausgewählt werden. Wenn dabei κ/n sehr klein ist, so wird $\cos \theta$ nahe zu Null und $\sin \theta$ zur eins. Dann nimmt die Gleichung (2) folgende Form an:

$$(26) \quad P = \frac{240 n i^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \kappa}{\kappa^2} d\kappa,$$

was, wie früher, den Widerstand gibt, der auf eine Antenne bei sehr großer Zahl von Antennen bezogen wird:

$$r = 120 \Omega.$$

Für die Antennen der zweiten Art (Harmonik)

$$(27) \quad P = 60 i^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \sin^2 \left[\frac{\pi n}{2} (1 - \cos \theta) \right] d\theta}{\sin \theta \sin^2 \left[\frac{\pi}{2} (1 - \cos \theta) \right]}.$$

Bei geraden n :

$$(28a) \quad P = 60 i^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi n}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta,$$

bei ungeraden n :

$$(28b) \quad P = 60 i^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi n}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta.$$

Mit Hilfe der van der Polschen Lösung erhält man:

$$(29) \quad P = 30 n i^2 [E + \lg 2\pi n - Ci 2\pi n],$$

wo Ci wie früher Integralcosinus ist, dessen Wert nahe zur Null ist.

In der Tabelle sind die Widerstände für verschiedene n angeführt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
r	72,5	47	35,2	28,5	24,8	21,1	17,3	16,90 Ω

e) Auf die diskutierten typischen Fälle können einige mehr komplizierte Kombinationen zurückgeführt werden, so z. B. eine Kombination der vielstöckigen Antenne mit einer Antenne mit horizontaler Basis, sowie auch „räumliche Systeme“, die aus einer Anzahl von Vibratoren zusammengestellt sind.

Die Regel der Zusammenstellung der Formel bleibt dieselbe und kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(30) \quad P = \frac{60 i^2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \dots d\alpha \cdot d\theta.$$

II. Die Verteilung der Strahlung im Raume

Die Dunkelheitszonen verteilen sich, wie oben gesagt wurde, längs den Bögen der kleinen Kreise der Kugel, von der

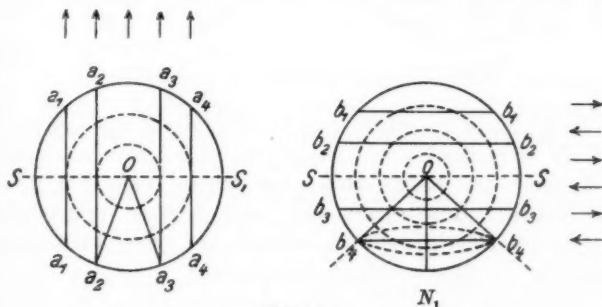


Fig. 8.

die Antenne umgeben ist. Diese Bögen genügen der Bedingung $y_n = 0$, wo y_n einer der Phasenfaktoren ist, die im Ausdrucke (30) hervortreten.

Für einstöckige Antennen sind die Projektionen dieser Bögen auf die Äquatorialebene die Geraden aa , bb (Fig. 8) die parallel zur Projektion vom ersten Meridian verlaufen.

Im Falle eines synphasen Systems von Vibratoren ist der

Hauptstrahl durch die Zonen a begrenzt. Der von ihm erfüllte Raum kann bei Drehung des Sektors $a_2 O a_3$ um O erhalten werden.

Im Falle des Systems mit wechselnden umgekehrten Phasen (Harmonik), wird die Grenze des Hauptstrahls durch die Zonen b bestimmt. Der von ihm erfüllte Raum kann bei Drehung des Sektors $C_4 O N_1$ um die Achse $O N_1$ erhalten werden und ist kegelförmig.

Hier tritt der merkwürdige Unterschied der Strahlungsverteilung von beiden Systemen hervor. Dieser Unterschied wird klar, wenn man die Strahlungsverteilung in der Äquatorialebene mit der längs irgendwelchem Bogen der kleinen Kreise vergleicht. Die Projektionen der letzten sind in der Fig. 8 (punktiert) angedeutet.

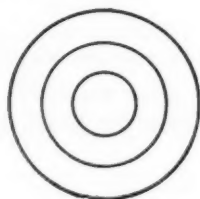


Fig. 9.

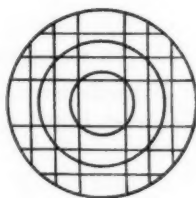


Fig. 10.

Es ist leicht zu sehen, daß je näher der kleine Kreis zum Zenit im synphasen System ist, desto mehr der Seitenstrahlen verschwinden der Reihe nach. Im Gebiete nah vom Zenit bleibt nur der Hauptstrahl übrig und folglich verschwindet praktisch bei jeder synphasen Antenne bei einem bestimmten Winkel der Erhöhung ihre Richtwirkung.

Umgekehrt im Falle einer Antenne mit wechselnden Phasen verschwindet bei Erhöhung über dem Horizont zu erst der Hauptstrahl und dann der Reihe nach die Seitenstrahlen, die zum Hauptstrahl am nächsten sind.

Bei vielstöckigen Antennen sind die Projektionen der strahlungsfreien Zonen „der Dunkelheit“ durch konzentrische Kreise angedeutet, deren gemeinsamer Mittelpunkt mit dem des Äquatorialkreises zusammenfällt (Fig. 9).

Bei Zusammensetzung der beiden Arten von Vibratoren

in einem System erhält man eine räumliche Antenne, die auch vielstöckig sein kann. In diesem Fall sieht die Projektion der Dunkelheitszonen auf die Äquatorialebene wie ein Netz aus (Fig. 10).

Die Strahlung eines Systems dieser Art wird in eine große Menge der einzelnen Strahlen zerfallen, die verschiedene Intensität und Form besitzen können und voneinander durch schneidende strahlungsfreie Zonen begrenzt sind.

II. Die Spiegel

a) Die Wirkung eines grenzenlosen leitenden Spiegels kann durch die Wirkung einer Spiegelabbildung der reellen Antenne ersetzt werden. Die Erdoberfläche ist für die Wellen der Radiofrequenzen mehr der Trennungsfläche eines zerstreuen Mediums ähnlich. Die Reflexion hängt von der Wellenlänge, vom Inzidenzwinkel des Strahles und sehr wahrscheinlich von der Amplitude des elektromagnetischen Feldes ab.

In erster Annäherung aber kann man die Erde als einen metallischen Spiegel betrachten. Das bestätigt sich erfahrungsgemäß im Falle der Reflexion der Wellen von der Größenordnung $\sim 2m$ an Stoffen, die von Wasser mit kleinem Salzgehalt angefeuchtet sind.

Im folgenden wird die Erdoberfläche als eben angenommen mit einem Absorptionskoeffizienten κ . Als Absorptionskoeffizient ist dabei das Verhältnis der absorbierten zu der einfallenden Energie bezeichnet.

Die Antenne mit vertikalen Vibratoren sei im Zentrum einer großen Kugel gedacht, deren Äquatorialebene mit der Erdoberfläche zusammenfällt. Wir wollen jetzt den quadratischen Mittelwert des resultierenden magnetischen Vektors H an der Kugeloberfläche, als eine geometrische Summe von Vektoren h und $h\sqrt{1-\kappa}$ bestimmen, die von der Antenne selbst und ihrer Spiegelabbildung hervorgerufen sind.

Um die Phasenfunktion ψ zu finden wird die Antenne wie oben durch Dipole ersetzt.

Die Phasenverschiebung zwischen den Komponentenvektoren in einem Punkte der Kugeloberfläche besteht erstens aus der Phasenverschiebung φ , die infolge des Gangunterschiedes der Strahlen $\varphi = \frac{4\pi l}{\lambda} \cdot \cos \theta$ entsteht; hier l ist der

Abstand des Mittelpunkts der Antenne von der Spiegelfläche und θ die Polarkoordinate des Aufpunktes. Zweitens wird zur Phasenverschiebung auch der Phasenunterschied der Ströme in den Dipolen beitragen, den wir der Formel (7) gemäß den Dipolen im Mittelpunkte der Antenne zuschreiben müssen.

Da die Phase jedes solchen Dipols in bezug auf den ersten Teil der Antenne gleich

$$\Delta = \gamma + \zeta \frac{(n-1)}{2}$$

gesetzt werden muß, so wird der Phasenunterschied

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \gamma_1 - \gamma_2,$$

wo γ die Phase des ersten Elements der Antenne ist.

Im Falle einer synphasen Antenne (Fig. 11) wird augenscheinlich:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 0.$$

Im Falle einer Antenne mit wechselnder Phase (Fig. 12) wird

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \pi(n-1).$$

Demgemäß wird der quadratische Mittelwert:

$$(31) \quad H^2 = h^2 \left[2 - \pi + 2 \sqrt{1 - \pi} \cdot \cos \left(\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{4\pi l}{\lambda} \cos \theta \right) \right].$$

Das Phasen-Funktions-Quadrat mit der eingebrachten Korrektur auf die Energieverluste bei Reflexion wird, wie leicht zu ersehen ist:

$$\psi_1^2 = \frac{H^2}{h^2}.$$

Wenn für ein bestimmtes Antennensystem, das von der Erde weit entfernt wurde, die ausgestrahlte Leistung

$$(32) \quad P_1 = A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\alpha, \theta) d\alpha d\theta$$

war, so wird im Falle der spiegelnden Wirkung der Erde die Leistung nach der Reflexion:

$$(33) \quad P_2 = A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\alpha, \theta) \psi_1^2 \cdot d\alpha \cdot d\theta$$

und die von der Antenne ausgestrahlte Leistung:

$$(34) \quad P_3 = \frac{P_2}{1 - \frac{\pi}{2}}.$$

Daraus kann auch der Widerstand der Antenne in Anwesenheit der Erde gefunden werden.

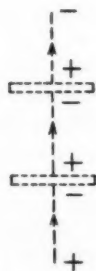
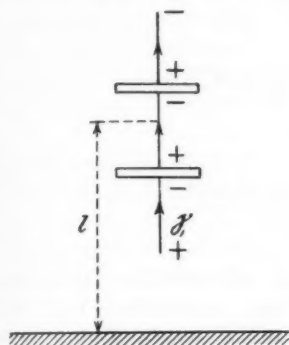


Fig. 11.

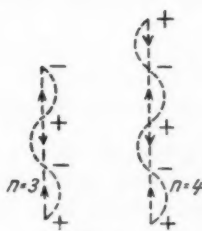
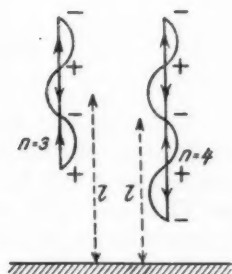


Fig. 12.

Das Vorhandensein des Faktors ψ_1^2 in der Subintegralfunktion ruft neue Dunkelheitszonen (oder Schwächung der Strahlung) hervor in den Ebenen der kleinen Kreise, die der Gleichung:

$$(35) \quad \cos \left[\frac{4\pi l}{\lambda} \cos \theta - \gamma_1 - \gamma_2 \right] = -1$$

genügen.

Um eine volle Dunkelheit zu erreichen muß $\kappa = 0$ sein. Die Zahl dieser Zonen nimmt mit l zu.

Wenn man κ gleich Null und $l = \frac{\lambda n}{4}$ setzt, so erhalten wir bei Einführung der Phasenfunktion ψ_1 in den Ausdruck für die Antenne mit wechselnden Phasen die Gleichung von Ballantin und van der Pol in folgender Form:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für gerade } n: \\ P = 60i^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[1 - \cos(\pi n \cos \theta)]^2}{\sin \theta} d\theta, \\ \text{für ungerade } n: \\ P = 60i^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[1 + \cos(\pi n \cos \theta)]^2}{\sin \theta} d\theta. \end{array} \right.$$

b) Es sei das Antennensystem mit vertikalen Vibratoren im Zentrum derselben großen Kugel angeordnet und ein grenzenloser aperiodischer Spiegel werde parallel den Achsen von Vibratoren und ihrer Basislinie ss_1 gerichtet. In der Äquatorialebene an der Kugeloberfläche wird der Phasenverschiebungswinkel zwischen den Vektoren der Antenne und ihrer Abbildung gleich

$$\varphi = + \frac{4\pi l}{\lambda} \cos \alpha + \gamma_1 - \gamma_2,$$

wo l der Abstand von der Spiegeloberfläche bis an den geometrischen Mittelpunkt der Antenne ist, und

$$(Fig. 13 \text{ und } 14.) \quad \gamma_1 - \gamma_2 = \pi.$$

Indem man diesen Ausdruck auf die ganze Kugel anwendet findet man die Phasenfunktion in folgender Form:

$$(37) \quad \psi_2^2 = \left[2 - \kappa - 2\sqrt{1 - \kappa} \cdot \cos\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right) \cos \alpha \cdot \sin \theta \right].$$

Die Durchschnittspunkte der Zonen der Dunkelheit mit dem Äquatorialkreis werden durch die Bedingung

$$(38) \quad \cos \frac{4\pi l}{\lambda} \cos \alpha = + 1$$

bestimmt. Die Ebenen dieser Zonen sind der Spiegelebene parallel und in dem betrachteten Falle stehen sie senkrecht zur Ebene des ersten Meridiankreises.

c) Ein großes Interesse bietet die spiegelnde Wirkung der Erde im Falle einer geneigten Antenne.

Die analytische Betrachtung dieses Falles ist sehr kompliziert und wir beschränken uns nur auf folgende Bemerkungen. Das Gesetz $h_0 = f(\alpha, \theta)$, für die Amplitude des magnetischen Vektors, der an der Kugel von der Antenne hervorgerufen ist, wird als bekannt vorausgesetzt im Falle, wenn die polare Achse der Kugel mit der Vibratorenachse zusammenfällt. Für eine Kugel, deren polare Achse mit den Vibratorenachsen einen Winkel ε einschließt, wird

$$h_0 = f(\beta, \Delta),$$

wo β und Δ die neuen Variablen sind, die mit den alten durch die bekannten Beziehungen verbunden sind, die aus der Tatsache der Drehung der polaren Achse hervorkommen.

Wenn die Spiegelebene mit der Äquatorialebene des neuen Koordinatensystems zusammenfällt, so schließen die Vibratorenachsen in der Spiegelabbildung der Antenne mit der neuen polaren Achse einen Winkel $\pi - \varepsilon$ ein.

Die Amplitude des magnetischen Vektors von der Spiegelabbildung wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$h_0' = \sqrt{1 - \kappa} f[(\pi - \Delta, \beta)],$$

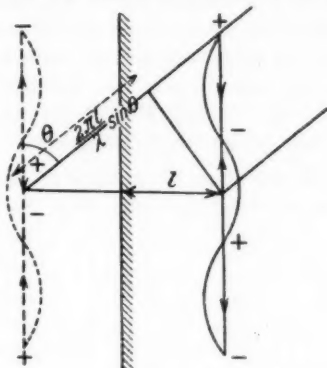


Fig. 13.

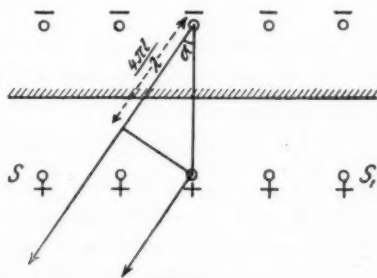


Fig. 14.

d. h. sie unterscheidet sich von dem entsprechenden Ausdrucke der Antenne selber.

Wenn die Phasen der beiden Vektoren zusammenfallen würden, so würde sich die Amplitude des resultierenden Vektors als geometrische Summe der Komponenten mit dem Winkel ζ zwischen ihnen ergeben. Tatsächlich findet eine solche Phasenkoinzidenz nur in einzelnen Punkten der Kugel statt, im allgemeinen aber existiert ein Verschiebungswinkel zwischen den Phasen der infolge des Gangunterschiedes entsteht. In diesem Fall kann der resultierende Vektor auf folgende Weise bestimmt werden:

Es sei (Fig. 15) $h_0 \sin(\omega t)$ der Vektor der Antenne und $h_0' \sin(\omega t + \varphi)$ der von dem Spiegel in einem bestimmten Punkte der Kugel. Dabei

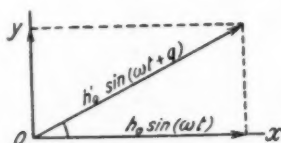


Fig. 15.

schließen die Richtungen dieser Vektoren einen Winkel ζ ein. Die Achse ox der rechtwinkligen Koordinaten falle mit der Richtung von h_0 zusammen. Die Projektionen des resultierenden Vektors H auf die x - und y -Achsen sind:

$$(39) \quad H_x \sin z = h_0 \sin(\omega t) + h_0' \sin(\omega t + \varphi) \cos \zeta,$$

$$(40) \quad H_y \sin z_1 = h_0' \sin(\omega t + \varphi) \sin \zeta.$$

Daraus wird

$$(41) \quad H_x^2 = h_0^2 + (h_0' \cos \zeta)^2 + (h_0' \sin \zeta)^2 + 2 h_0 h_0' \cos \zeta \cos \varphi,$$

$$(42) \quad H_y^2 = (h_0' \sin \zeta)^2.$$

Da H_x und H_y zueinander senkrecht stehen, so kann der Poyntingsche Vektor für jede Komponente gesondert berechnet werden und die Summe wird den resultierenden Vektor darstellen. Die Zusammenwirkung von H_x und H_y ruft ein drehendes Feld hervor, wenn $\zeta \neq \pi$ und $\varphi \neq \pi$ (π eine ganze Zahl).

Die Phasenfunktion kann in diesem Falle nicht aufgeschrieben werden, da h_0 und h_0' sich nach den verschiedenen Gesetzen verändern. Die Verteilung der Dunkelheitszonen der Antenne und ihres Spiegelbildes hängt davon ab, ob die An-

tennen allein oder auch ihre Basislinie geneigt ist. Im letzten Falle nimmt die Interferenz einen noch komplizierteren Charakter an, und die Koinzidenz der Dunkelheitszonen der Antenne und des Spiegel wird aufgehoben. In diesem Falle geschieht die Schwächung der Strahlung nur in den Durchschnittspunkten der Zonen der Antenne und des Spiegels. Solcherweise führt die Neigung der Antenne in Bezug auf den Spiegel zur Vernichtung der Interferenzstreifen und wirkt folglich günstig auf die Fadingerscheinung.

Fig. 16 gibt die Projektion des Strahlungsbildes eines synphasen Systems mit aufgehobenen horizontalen Lecher-

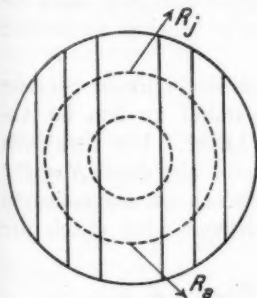


Fig. 16.

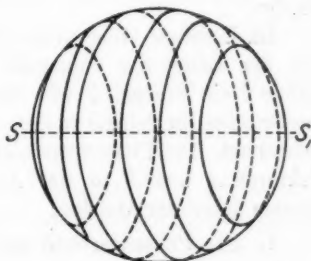


Fig. 17.

schen Drähten. Die Ebene des Systems ist geneigt. Die Antenne und ihr Spiegelbild haben die gemeinsamen Dunkelheitszonen. Der Hauptstrahl R ist von der Erde auf den Winkel der Neigung der Antenne gehoben. Durch punktierte Kreise mit Zentrum im Pole sind die Zonen angedeutet, die den Dunkelheitszonen entsprechen, die von der Interferenz der Strahlung der Antenne und ihres Bildes entstehen. In diesem Falle aber sind es keine Dunkelheitszonen, sondern Gebiete, in denen sich die magnetischen Vektoren der Antenne und ihres Bildes in umgekehrten Phasen begegnen. Das führt nicht zur Dunkelheit, da die Gesetze der Veränderung bei beiden Vektoren verschieden ausfallen und ein räumlicher Winkel zwischen ihnen existiert.

Fig. 17 bezieht sich auf dieselbe Antenne mit geneigtem Lecherschen System. Die Vibratoren sind in den Ebenen

senkrecht zur Erde angeordnet. An der Kugel erhält man zwei unabhängige, sich überkreuzende Systeme der Dunkelheitszonen. Die ausgezogenen Linien bedeuten die Zonen der Antenne, mit fetten Punktierungen sind die Zonen des Bildes angedeutet. Eine vollkommene Dunkelheit kann nur in Treffpunkten der Zonen von beiden Systemen stattfinden. Ein ähnliches Interferenzbild entsteht auch für einen geneigten Luftdraht mit wechselnden Phasen.

d) Die abgestimmten Spiegel können erzwungener- oder freierweise angeregt werden durch räumliche Koppelung mit der Antenne. Im Falle einer erzwungenen Erregung kann die Phase und die Amplitude des Spiegels beliebig ausgewählt werden.

Im Zentrum einer großen Kugel sei ein vertikaler Strahler von der Länge $h/2$ aufgestellt und parallel zu ihm im Abstände l ein Spiegel B von derselben Länge. Das Verhältnis des Stromes im Spiegel zu dem im Vibrator wird durch $N = F(l)$ bezeichnet. Die Phasenverschiebung zwischen den magnetischen Vektoren A und B in der Äquatorialebene wird gleich der Summe folgender Größen:

1. Die Phasenverluste auf dem Wege AB , d. h. $\frac{2\pi l}{\lambda}$.
2. Die Phasenverschiebung zwischen dem Felde, das zum Spiegel ankommt und dem von dem Spiegel selbst gebildeten (ψ).
3. Die Phasenverschiebung, die infolge des Gangunterschiedes entsteht: $\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \alpha$.

Die ersten zwei Summanden sind dieselben für alle Punkte der Kugeloberfläche, die letzte wird für verschiedene Stellen der Oberfläche folgendermaßen ausgedrückt:

$$\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \alpha \sin \theta.$$

Wenn der quadratische Mittelwert des resultierenden Vektors an der Kugeloberfläche H ist, und die Komponenten h und $n h$, dann wird

$$(43) \quad \psi^2 = \frac{H^2}{h^2} = 1 + N^2 + 2N \cos \left[\zeta + \frac{2\pi l}{\lambda} (1 + \sin \theta \cos \alpha) \right].$$

Der Wert von ψ^2 ändert sich in Abhängigkeit von dem Ausdrucke, der unter \cos steht in den Grenzen von $(1 + N)^2$

bis $(1 - N)^2$. Wenn $N = 1$, so wird der maximale Wert von $\psi_3^2 = 4$ und minimale $= 0$.

Wenn N nahezu 1 ist, ζ nahezu π , so findet man für die Äquatorialebene folgendes. Wenn der Spiegel nahe zur Antenne steht ($l = 0$) $\psi_3^2 = 0$ für jedes Azimut. Wenn $l = \frac{\lambda}{4}$, dann wird $\psi_3^2 = 4$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\psi_3^2 = 0$ für $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Die Strahlung wird zur Antenne gerichtet. Bei weiterem Ansteigen von l teilt sich der Strahl in zwei Teile, die immer mehr in verschiedene Seiten auseinandergehen.

Im Falle von $\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{8}$ nimmt das Strahlungsdiagramm eine schmetterlingsartige Gestalt, indem zwei längere Flügel zur Antenne gerichtet sind. Im Maximum bei $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\frac{3}{4}\pi$ wird $\psi_3^2 = 4$. Wenn $l = \frac{\lambda}{2}$, $\psi_3^2 = 4$ und die Strahlung wird senkrecht zur Verbindungslinie der Antenne und des Spiegelleiters gerichtet.

Wenn der Spiegel durch die Induktion von der Antenne erregt ist, wird $N < 1$, N wächst mit Annäherung zum Spiegel an. Die erfahrungsmäßig gefundene optimale Richtung des Strahles zur Antenne erhält man bei $l < \frac{\lambda}{4}$. Es wurde von W. W. Tatarinow festgestellt, daß die vorteilhafteste Lage, $l = 0,20 \lambda$ entspricht. Wenn keine erzwungene Erregung stattfindet, kann die Phasenfunktion ψ_3 auch für komplizierte Antennen angewandt werden, wenn nur der Abstand zwischen den Spiegeln und Vibratoren wesentlich kleiner ist als der Abstand zwischen den nächsten Vibratoren. In diesem Fall kann der Spiegel als nur mit einem der Vibratoren gekoppelt angenommen werden.

Wenn das Spiegelsystem sich im Abstände von $0,20 \lambda$ befindet, ist diese Bedingung angenähert befriedigt.

e) Der Widerstand der Antenne bei Anwesenheit von Spiegeln kann bestimmt werden durch Ermittlung der entsprechenden Integrale nach der Multiplikation der Subintegralfunktion mit der Phasenfunktion des Spiegels. So z. B. für

einen langen vertikalen Leiter mit wechselnden Phasen, wird nach der Gleichung (34) die Leistung:

$$P_3 = \frac{P_1}{1 - \frac{\kappa}{2}}$$

erhalten, wo P_2 die Leistung nach der Reflexion ist; nach (26) und (31) wird sie folgendermaßen ausgedrückt:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} P_2 &= 60i^2 \\ &\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \sin^2\left[\frac{\pi n}{2}(1 - \cos \theta)\right] \left[2 - \kappa + (-1)^{n+1} 2\sqrt{1 - \kappa} \cos\left(\frac{4\pi l}{\lambda} \cos \theta\right)\right]}{\sin \theta \cdot \sin^2\left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta)\right]} d\theta \end{aligned} \right.$$

Die Ermittlung dieses Integrals gibt folgendes:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} P_3 &= P_1 + (-1)^{n+1} \cdot 15i^2 \frac{\sqrt{1 - \kappa}}{1 - \frac{\kappa}{2}} [\sin(p\pi) \{2Si(2p\pi) \\ &- Si(2\pi(p-n)) - Si(2\pi(p+n))\} - \cos(p\pi) \{2lg(2p\pi) \\ &- 2Ci(2p\pi) - lg(2\pi(p-n)) - lg(2\pi(p+n)) \\ &+ Ci(2\pi(p+n)) + Ci(2\pi(p-n))\}] . \end{aligned} \right.$$

Hier ist P_1 die in Abwesenheit des Spiegels ausgestrahlte Leistung, die durch Gleichung (29) bestimmt wird; κ der Absorptionskoeffizient; n die Zahl der Halbwellen auf dem Leiter; p der Abstand des Mittelpunktes des Leiters vom Spiegel in Viertelwellenlängen ausgedrückt; Si Integralsinus, Ci -Integralcosinus und lg natürlicher Logarithmus.

Wenn $p = \frac{4l}{\lambda}$ eine ganze Zahl ist, so wird das erste Glied des Ausdruckes in eckigen Klammern gleich Null, da $\sin(p\pi) = 0$, im zweiten Gliede sind alle Integralcosinus nahe zu Null mit Ausnahme des Falles, wenn $p = a$ ist; dann:

$$(46) \quad Ci(p-a) - lg(p-a) = E = 0,577 .$$

Wenn p eine ganze Zahl ist, so wird der Abstand zwischen den nächsten Punkten der Antenne und ihrer Spiegelabbildung einer ganzen Zahl von $\lambda/2$ gleich.

Wenn $2n$ eine ganze ungerade Zahl ist, dann wird $\cos(p\pi) = 0$ und folglich bleibt nur das erste Glied in Klammern

übrig. Das entspricht einem Falle, wo die nächsten Punkte der Antenne und ihrer Spiegelabbildung sich in einem Abstände befinden, der einer ganzen Zahl von $\lambda/4$ gleich ist.

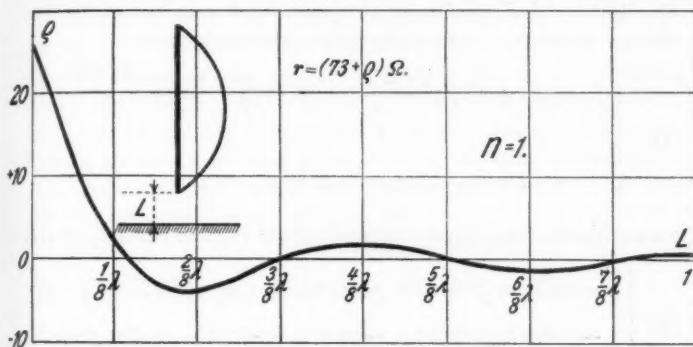


Fig. 18

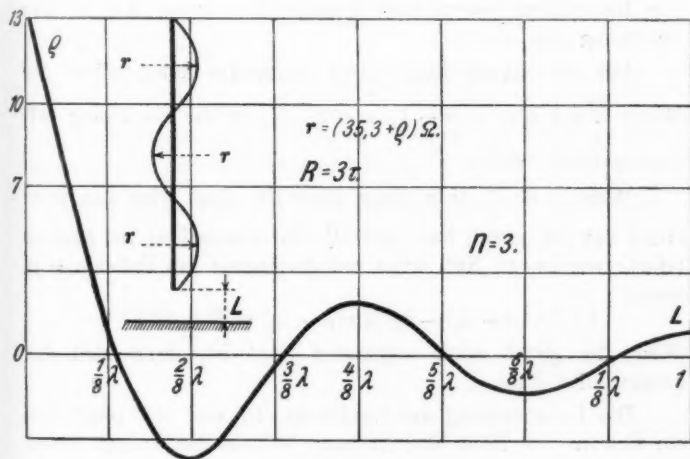


Fig. 19

Auf den Figg. 18 und 19 sind die Kurven, die nach der obigen Formel (45) konstruiert sind für den Fall, wo man die Erde als Spiegel mit $K = 0$ betrachtet, gezeichnet. Ihre Ordinaten stellen die Vergrößerungen des Strahlungswiderstandes

eines Leiterelements von der Länge $1/2\lambda$ unter Wirkung der Erde.

Durch eine ähnliche Substitution in die Gleichung (20) und Ermittlung des erhaltenen Integrals wird man für einen synphasen vertikalen Leiter folgenden Ausdruck finden:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} P_s &= P_1 + 15i^2 \frac{\sqrt{1-\kappa}}{1-\frac{\kappa}{2}} (-1)^{n+1} \left[\overset{n\pi}{\underset{0}{S}} - 4 \overset{(n-1)\pi}{\underset{0}{S}} + 8 \overset{(n-2)\pi}{\underset{0}{S}} \right. \\ &\quad \left. - 12 \overset{(n-3)\pi}{\underset{0}{S}} + \dots \pm (n-1) 4 \overset{\pi}{\underset{0}{S}} \right], \end{aligned} \right.$$

wo zur Verkürzung durch $\overset{a\pi}{\underset{0}{S}}$ eine folgende Formel bezeichnet ist:

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{a\pi}{\underset{0}{S}} &= \sin(p\pi) [2Si(2p\pi) - Si(2\pi(p-a)) - Si(2\pi(p+a))] \\ &\quad - \cos(p\pi) [2lg(2\pi p) - lg(2\pi(p-a)) - lg(2\pi(p+a))] \\ &\quad + 2Ci(2\pi p) - Ci(2\pi(p+a)) - Ci(2\pi(p-a))]. \end{aligned} \right.$$

Die Buchstaben haben hier dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (45).

Die Berechnung kann durch sukzessive Substitution der Werte $\overset{a\pi}{\underset{0}{S}}$ bei $a = n, n-1, n-2 \dots$ in die Gleichung (47) durchgeführt werden.

Wenn $p = \frac{4l}{\lambda}$ eine ganze Zahl ist, dann wird das erste Glied von (48) gleich Null und alle Integralcosinus im zweiten Gliede werden zu Null nahe mit Ausnahme des Falles $a = p$, wenn:

$$Ci(2\pi(p-a)) - lg(2\pi(p-a)) = E = 0,577.$$

Wenn $2n$ gleich einer ungeraden Zahl ist, dann wird das zweite Glied Null.

Die Untersuchung der Ausdrücke (45) und (47) zeigt, daß ein sich in der Nähe der Antenne befindender Spiegel einen großen Einfluß auf den Widerstand der Antenne ausübt. Je nach dem Abstände zwischen der Antenne und dem Spiegel, kann der letztere eine Vergrößerung, wie auch eine Verminderung des Widerstandes hervorrufen.

Wenn das untere Ende eines vertikalen Luftleiters sich in der Nähe eines gut leitenden Bodens befindet, dann können

die kleinsten vertikalen Verschiebungen des Leiters sehr stark den Strahlungswiderstand beeinflussen.

f) Ein praktisch wichtiger Fall ist der, wenn der Spiegel, hinter einer ebenen synphasen Richtantenne angeordnet ist um die Strahlung in eine Seite zu richten. Die Berechnung des Widerstandes wird sehr vereinfacht, wenn man annimmt, daß der Spiegel die Energieverteilung des Strahles nicht verändert, sondern nur eine seiner Hälften auf 180° herumdreht. Das kann in erster Annäherung zugelassen werden, wenn nur die Zahl von Vibratoren nicht zu klein ist.

Dann kann man in der früher abgeleiteten Formel (43):

$$(43) \quad \psi_s^2 = 1 + N^2 + 2N \cos \left[\zeta + \frac{2\pi l}{\lambda} (1 - \sin \theta \cos \alpha) \right]$$

$\sin \theta \cos \alpha = \cos \alpha_1$ gleich 1 setzen, da der Winkel α_1 in der Äquatorialebene klein ist. Wir erhalten

$$(49) \quad \psi_s^2 = 1 + N^2 + 2N \cos \left(\zeta + \frac{4\pi l}{\lambda} \right)$$

und infolgedessen:

$$(50) \quad P_s = \frac{2P_1}{1 + N^2} = \frac{2P_1}{1 + N^2} \left[1 + N^2 + 2N \cos \left(\zeta + \frac{4\pi l}{\lambda} \right) \right].$$

Die Formeln (45), (47) und (50) können zur experimentellen Ermittlung des Absorptionskoeffizienten benutzt werden.

Nižnij-Novgorod, Radiolaboratorium, 20. April 1926.

(Eingegangen 11. Juni 1926)

**2. Reaktionskonstanten, Verweilzeiten,
Rekombinationen und Wechselzahlen in Flammengasen und die Sättigungsspannungen der
Charakteristik;
von Erich Marx**

I. Einleitung: Die Theorie der Ladungszahl, Beweglichkeit und thermischen Ionisation als Grundlage für die Berechnung obiger Größen

1. Die Berechnung der Dissoziationskonstanten in Arbeit I

In einer Arbeit¹⁾ über „Elektrizitätsleitung, Ladungszahl, Beweglichkeit und thermische Ionisation in Flammengasen“ habe ich eine Theorie der Flammenleitung aufgestellt, welche auf der Sahaschen Theorie, also auf thermodynamischer Grundlage fußend, zunächst den Ionisationsgrad eines in die Flamme zerstäubten Alkalisalzes aus der Ionisationsarbeit der Salze und Atome, den spezifischen Wärmen derselben und deren chemischen Konstanten berechnete. Diese Berechnung wäre wegen der Unkenntnis der spezifischen Wärmen $(C_p)_{\text{Salz}}$ der Alkalisalze nicht möglich gewesen, wenn nicht eine weitere Beziehung hinzugekommen wäre. Diese Zusatzgleichung ist die folgende: Ist y der Dissoziationsgrad der Alkalisalze in Atome, x der des Natriumatoms in Elektronen und positive Ionen, so ist xy der Dissoziationsgrad des Salzes in geladene Träger und es gilt, in Übereinstimmung mit den Experimenten von Smithells, Wilson und Dawson und denen von Marx und von Moreau und schließlich denen von Zachmann die von mir (I, S. 762) abgeleitete Beziehung

$$(1) \quad xy = \text{const} \sqrt{A},$$

wo A das Atomgewicht des Alkalimetalles bezeichnet. Nimmt man diese Beziehung als Zusatzbedingung auf, so erhält man zur Bestimmung der drei Unbekannten $(C_p)_{\text{Salz}}$, x , y , drei Gleichungen, nämlich

1) Erich Marx, Ann. d. Phys. IV. 76. S. 737—784, hier „Arbeit I“ genannt.

1. Die Nernstsche Reaktionsisotherme der Sahaschen Theorie für das Gleichgewicht der Dissoziationsprodukte des Alkalisalzes in Atome.

2. Die Nernstsche Reaktionsisotherme für das Gleichgewicht der Dissoziation in geladene Träger.

3. Die soeben genannte Beziehung zwischen Dissoziationsgrad und Atomgewicht.

Da in diesem letzten Falle die Konstante der Proportion nicht angebar ist, wird lediglich der Gang der spezifischen Wärmen der Alkalichloride nicht ihre absolute Größe erhalten. Nimmt man eine der spezifischen Wärmen der Alkalichloride als plausibel an, so ergeben sich die übrigen und gleichzeitig die Dissoziationskonstanten zwangsmäßig. Letztere ergeben sich aber mit wesentlich größerer Genauigkeit als die spezifischen Wärmen, welche die Willkürlichkeit in Hinsicht ihrer Absolutwerte enthalten. Denn durch die angegebene Art der Berechnung enthalten die Zahlenwerte, welche den spezifischen Wärmen zugeschrieben werden, diejenigen Glieder der Nernst-schen Gleichung mit, die zur Vereinfachung des Problems nicht in Ansatz gebracht wurden. Man kann im Sinne der Nernst-Pollitzerschen Bezeichnung der ad hoc festgelegten chemischen Konstanten, hier von „Konventionellen Konstanten der spezifischen Wärmen der Alkalichloride“ sprechen.

2. Die Unterteilung der Ladungszahl

Die Beziehung $xy/\sqrt{A} = \text{const.}$ auf die zuerst die Messungen der Verschiebung der Elektrizitätsträger in Flammengasen führte, wird von der Theorie erhalten, wenn man die kinetische Hypothese einführt, daß der wandernde Träger in der Flamme während der Wanderung sowohl eine Änderung der Ladung durch zeitweilige Rekombinationen, als eine solche der Masse durch zeitweilige Anlagerung an neutrale Moleküle erfahren kann. Bezeichnet β_0 den Bruchteil der Zeit, während der ein geladener Träger seine Grundform (Elektron oder Atom) beibehält, β_M den Bruchteil der Zeit, während der geladene Träger an ein oder mehrere Atome angelagert ist, so ist

$$(2) \quad \beta = \beta_0 + \beta_M = \frac{A_W}{A_N + A_W},$$

wenn Δ_W die Dauer des wanderungsfähigen,

Δ_N die Dauer des neutralisierten Zustandes bezeichnet. Ist ferner K die Beweglichkeit des Trägers im Felde von 1 Volt/cm, so ist βK die „Verschiebung“, welche der Träger erleidet. Diese Verschiebung ist infolge der zeitweiligen Anlagerung und zeitweiligen Neutralisation um den Faktor β verschieden von der Beweglichkeit.

3. Die Berechnung des Verschiebungskoeffizienten, den man auch „Ladungszahl“ genannt hat, habe ich in I, S. 756, so ausgeführt, daß ich für die im Gleichgewicht in der Flamme sich bildende Trägermenge Proportionalität mit der Menge des *zeitweilig* nicht ionisierten Salzes annahm, also eine Reaktion erster Ordnung.

Bezeichnet man mit a den Proportionalitätsfaktor, also die Reaktionskonstante, ferner mit q die Dissoziationsfähigkeit des Alkaliatoms, eine Konstante, welche für die verschiedenen Alkaliatome natürlich verschieden ist, die auch „Emissivitätskoeffizient“ genannt wurde, so soll die in der Sekunde frei werdende Trägerzahl proportional mit der Dissoziationsfähigkeit des Alkaliatoms und proportional mit der jeweilig, also vorübergehend nicht dissoziierten Zahl der Metallatome gesetzt werden. Es ist dies der einfachste Ansatz, der überhaupt möglich ist. Dann werden in der Sekunde Elektrizitätsträger eines Vorzeichens frei in der Anzahl [Gleichung (12) in I]

$$(3) \quad a n q (1 - \beta).$$

Ist der Bruchteil der Zahl der neutralen Atome, die dissoziiert sind, bereits = 1, so werden keine frei. Die Anzahl der freien Träger in Kubikzentimeter ist $\beta q n$. Ist $\beta = 1$, so ist diese Anzahl = $n q$. Es ist demnach q auch definierbar als Dissoziationsgrad bei dauernder Ladung. — Aus der Gleichsetzung der in der Sekunde entstehenden mit der in gleicher Zeit verschwindenden Ladung ergibt sich dann für β klein gegen 1 (I, S. 756), wenn α die Rekombinationskonstante ist,

$$(4) \quad \beta = \sqrt{\frac{\alpha}{a n q}} \cdot 1)$$

1) *Anmerkung, Arbeit I betreffend.* Ist β nicht klein gegen 1, so ist es nicht angängig für $\beta \sim 1$, auf dieser Gleichung (4) fußend, auf $q n = \alpha / a$ zu schließen, wie dies in I geschehen ist. Vielmehr muß dann

4.

Die Leitfähigkeit λ ist gegeben durch

$$(5) \quad \lambda = \beta K_2 e q n = \bar{K}_2 e q n,$$

wo \bar{K}_2 die gemessene negative Verschiebung ist. Nun ist K_2 , die Beweglichkeit der negativen Träger, berechenbar: Die Leitfähigkeit λ ist beobachtet und βq ist der aus den Reaktionsisothermen berechnete Dissoziationsgrad. Man erhält also aus der Gleichung für β und λ und dem bekannten Dissoziationsgrad, β und q . Aus der additiven Zusammensetzung der Verschiebung aus den Summanden im freien und angelagerten Zustand, also aus

$$(6) \quad \bar{K}_2 = \beta K_2 = \beta_0 K_0 + \beta_M K_M$$

erhält man

$$(7) \quad \beta_M = \frac{\beta K_0 - \bar{K}_2}{K_0 - K_M},$$

wo K_0 die theoretische Beweglichkeit im freien, K_M die im angelagerten Zustand ist (I, S. 753 und 763). Ebenso erhält man β_0 aus Gleichung (2). Es wurde dabei die Anlagerung so gewählt, daß das Minimum der Belastung des freien Trägers die Gleichung (7) so befriedigte, daß der erhaltene Wert für β_M noch gerade unterhalb des Wertes von β , entsprechend der Gleichung (2), liegt. [Vgl. I, S. 779.]

5. Resultat der Arbeit I

Auf diesem Wege wurde β_0 , β_M , q , a/α für alle Alkalisalze und für die salzfreie Flamme aus dem vorliegenden,

auf I, Gleichung (12) [oder (8) dieser Arbeit] zurückgegriffen werden. Dann ergibt sich für die Zusammengehörigkeit der Werte von $a/\alpha n q$ mit β , folgende Tabelle:

$a/\alpha n q$	1	2	3	4	5	6	8	12	18	20	50
β	0,62	0,73	0,79	0,83	0,85	0,87	0,9	0,93	0,949	0,95	0,99

Man erhält [aus Gleichung (5)] aus dem beobachteten λ , und dem beobachteten βK_2 , den Wert $q n = 3,26 \cdot 10^9$; aus den (in I, Tab. 14) für a/α erhaltenen Zahlen ergibt sich hiermit $a/\alpha q n = 1,12$. — Dann folgt aus vorstehender Tabelle $\beta_{(\text{reine Fl.})} = 0,64$ mit $\beta_0 = 0,028$ und $\beta_M = 0,612$ nicht $\beta = 1$, wie in I, S. 758 und 775 angegeben war. Also ist der negative Träger in der reinen Flamme nur während 5 Proz. der ganzen Ladungszeit frei, wenn man $\beta K_2 = 1320$ annimmt. — Es ist aber, im Gegensatz zu I, S. 776 und 783, dann kein eindeutiger Schluß mehr möglich, daß größere Werte von βK_2 mit der Zachmannschen Leitfähigkeitsmessung in Widerspruch stehen würden.

zuverlässigeren Beobachtungsmaterial ermittelt (I. Tab. XI bis XIV); a/α zeigte sich hierbei nahezu unabhängig vom Atomgewicht. — Die übrigen Resultate der Arbeit I, nämlich die vollständige Erklärung der verschiedenen Atomgewichtsbeziehungen zur Wanderung und zur Leitfähigkeit, sowie zur Stromspannungscharakteristik (I, S. 758—762), ferner der Grund der Gleichheit der positiven Verschiebung für alle Alkalisalze (I, S. 778) und verschiedene andere Ergebnisse kommen für das Folgende nicht unmittelbar in Frage.

II. Ziel und Gang vorliegender Arbeit

6. Endziel: Die Charakteristikberechnung

Es wurde bereits in der Abhandlung I (S. 757) darauf hingewiesen, daß eine Erweiterung des Reaktionsansatzes der Gleichung (3) dahin führen müßte, in der Gleichung (2)

$$\beta = \frac{\Delta_w}{\Delta_w + \Delta_N}$$

den Zähler und Nenner gesondert zu berechnen und in die einzelnen Komponenten zu zerlegen, so daß die Dauer des Ladungszustandes des einzelnen Trägers bestimmbar würde und weiter müßte in der Gleichgewichtsgleichung [I, Gleichung (13)]

$$(8) \quad a n q (1 - \beta) = \alpha \beta^2 n^2 q^2,$$

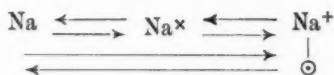
der Koeffizient a und α einzeln berechenbar werden. Ist dies aber erreicht, so muß sich hieraus der bisher lediglich durch die empirische Smithells-, Wilson-, Dawsonsche Gleichung ergebende Stromspannungsverlauf quantitativ berechnen lassen und aus dem Ergebnis selbst die Zulässigkeit der Annahmen gestützt werden, wenn sich Übereinstimmung mit dem Verlauf der aus den spezifischen Flammenkonstanten berechneten Charakteristik ergibt.

Bei Durchführung dieses Planes bin ich durch häufige, eingehende Besprechungen und Beratungen von meinem Kollegen G. Jaffé wesentlich unterstützt worden, wofür ich ihm herzlich zu danken habe.

7. Die Annahmen, die der Erweiterung der Theorie zugrunde liegen

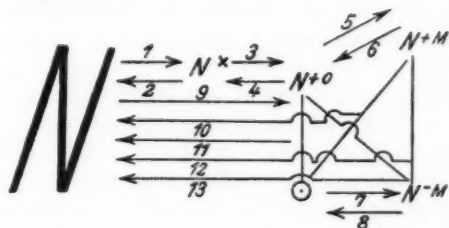
Der sich hier zunächst ohne jede Hypothese ergebende Weg ist, die Gleichgewichte, welche die Sahasche Theorie im

thermodynamischen Ansatz formuliert, als Reaktionsgleichungen anzusetzen, also etwa für Na, wenn Na den Grundzustand, Na \times den 2p-Zustand und N $^+$ bzw. \odot den Trägerzustand bezeichnet:



Die Reaktionsgleichungen enthalten dann bei ihrer Auflösung den Zusammenhang zwischen den Dissoziationskonstanten und den Reaktionskonstanten, welche den Übergang aus und in die stationären Zustände bedingen. Geht man vom Grundzustand des Na-Atomes aus und nimmt den alle anderen Zwischenstufen bei weitem überragenden mittleren 2p-Zustand als allein und wesentlich in Betracht kommend an, so würden 6 Konstanten auftreten, von denen 2 die Rekombination der Träger bedingen. (Vgl. Nr. 12 und 13.)

Berücksichtigt man, den Ansatz erweiternd, daß Anhängungen an neutrale Atome stattfinden, so wird die Zahl der Konstanten von 6 auf 13 vermehrt und es entsteht die Aufgabe, alle 13 Konstanten quantitativ zu bestimmen. Das Schema der Reaktion bei Berücksichtigung der Anhängungen wird dann folgendes:



Hier bezeichnet der Index +0 den freien positiven, +M den angelagerten positiven, \odot das Elektron, -M den angelagerten negativen Zustand.

Nun ist durch R. Ladenburg¹⁾ und seine Mitarbeiter in einer Reihe ausgezeichneten Untersuchungen zuerst gezeigt, daß

1) R. Ladenburg, Verh. d. D. Phys.-G. 1913, Naturw. S. 585. 1923; R. Ladenburg und M. Reiche, Naturw. 12. S. 672. 1924 (Planck-Heft); ferner W. Thomas, Ztschr. f. Phys. 24. S. 169. 1924.

die Reaktionskonstante, welche die Rückkehr des $2p$ -Zustandes der Alkaliatome in den Normalzustand bestimmt, quantitativ gleich der nach der klassischen Lorentz'schen Elektronentheorie berechneten Strahlungsdämpfung des Elektrons ist. Der Nachweis erfolgte aus den Dispersionskonstanten unter Hinzuziehung der Einsteinschen statistischen Verteilung. Auch ist von R. Ladenburg und R. Minkowski¹⁾ der gleiche Schluß aus Versuchen des letzteren²⁾ über die magnetische Drehung der Polarisationssebene der D -Linien des Na-Dampfes gezogen worden. Weiter aber hat eine quantitative Messung des Wertes dieser Reaktionskonstante neuerdings rein experimentell durch Ellett und Wood³⁾ einen Wert ergeben, der etwa um 17 Proz. den theoretischen Wert übersteigt, welchen die Strahlungsdämpfung ergeben hatte. Dieser Wert weicht um 40 Proz. von einem von Kerschbaum⁴⁾ erhaltenen ab. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daß hier verschiedene Verweilzeiten gemessen worden sind (die Verweilzeit ist ja hier das Reziproke der Reaktionsgeschwindigkeit). Aus verschiedenen Gründen scheint mir der Wert von Ellett und Wood, die bei unserer Betrachtung allein in Betracht kommende Reaktionsgeschwindigkeit, nämlich die reziproke Dauer des $2p$ -Zustandes zu ergeben, während der größere Wert von Kerschbaum die Dauer des $2p$ -Zustandes vermehrt um die Dauer der bei Rückkehr in den Normalzustand ausgehenden Strahlung angibt. (Vgl. Nr. 20.)

Die Einführung dieser direkt und indirekt sich auf verschiedenem Wege ergebenden Konstante ist die *einzige* neue, *wesentliche* *Hinzunahme*, welche die folgende Erweiterung bedingt: Denn die Ansätze, die zu den weiteren Konstanten führen, liegen so unmittelbar im Wesen der Annahme der Sahaschen Theorie, daß sie als kinetische Formulierung der thermodynamischen Annahmen bezeichnet werden können. Da nämlich die Sahasche Theorie für die Erreichung der einzelnen Quantenzustände im thermodynamischen Gleichgewicht die Anregungsenergien als maßgebend annimmt, diese

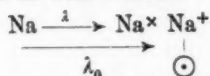
1) R. Ladenburg u. R. Minkowski, Ztschr. f. Phys. 6. S. 153. 1921.

2) R. Minkowski, Ann. d. Phys. 66. S. 206. 1921.

3) A. Ellett u. R. W. Wood, Journ. opt. Soc. Am. 10. S. 427. 1925.

4) H. Kerschbaum, Ann. d. Phys. 79. S. 465. 1926.

aber kinetisch durch die Stöße zweiter Art bestimmt werden, so müssen sich die Reaktionskonstanten, die zur Erreichung der verschiedenen Energieniveaus führen, verhalten, wie die Zahl der Stöße, welche hinreichende Relativenergie enthalten, um das Atom in die betrachteten Energiezustände zu versetzen. Es muß also in dem Schema



λ/λ_0 sich verhalten, wie die Zahl der Stöße mit dem Energieverhältnis $n(g^* g^+)/n(g^+ g^\infty)$, wobei $n(g^* g^+)$ die Zahl der Stöße bedeutet mit der Relativenergie zwischen der Grenze, die zur Anregung des $2p$ -Zustandes führt und derjenigen, die zur Ionisation führt, während $n(g^+ g^\infty)$ die Stöße der Relativgeschwindigkeit umfaßt, deren untere Grenze die Ionisationsenergie bestimmt.

Da nun die Relativkonzentration des N^* -Zustandes durch

die Boltzmannsche Gleichung $N^* = N^0 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ gegeben ist und die Konzentration der geladenen Träger durch die als Erweiterung der Boltzmannschen Gleichung auffaßbare Reaktionsisotherme der Sahaschen Gleichung ebenfalls festgelegt ist, die Konzentration aber von den Reaktionskonstanten abhängt, so läßt sich das Verhältnis N^*/N^0 sowohl, wie die Dissoziationskonstante durch die Reaktionskonstanten ausdrücken. Ist dann eine Reaktionskonstante (λ^*) absolut bekannt, das Verhältnis der übrigen aber durch das angegebene Verhältnis der Stoßzahlen errechenbar, so sind sämtliche 6 Konstanten des Schemas 1 festgelegt. Eindeutig bestimmt ist dann auch weiter der Nutzeffekt der Stöße. Denn der Nutzeffekt ist $\lambda^0/n(g^+ g_\infty)$ bzw. $\lambda/n(g^* g^+)$, wo Zähler und Nenner absolute Zahlen sind. Da nun die Häufigkeit der Erreichung des Ionisationsniveaus zu dem der Erreichung des $2p$ -Niveaus sich verhalten soll wie die Zahl der Stöße mit jeweilig hinreichender Energie, so ist der Nutzeffekt für diejenigen Stöße, welche zu diesen stationären Zuständen führen, notwendig der gleiche.

8. Die Reaktionen bei Anlagerungen

Hiermit ist aber noch nicht die Reaktion beherrscht, welche das Atom bzw. das Elektron in den Anlagerungszustand

führt. Diese Anlagerungen sind, wie aus Abhandlung 1 hervorgeht, von grundlegender Bedeutung für das Verständnis der Flammenleitung; am extremsten zeigte sich dies im Falle der reinen Flamme. Es zeigte sich, daß in der reinen Flamme die Zahl der Rekombinationen von Trägern verschiedenen Vorzeichens, bzw. Vorzeichenwechsel, sehr klein ist, gegenüber der Zahl der Anlagerungen. Man wird also ein Gleiches, auch bei relativ geringer Konzentration der Metallatome erwarten können, so daß die Zahl der Massenwechsel die der Ladungswechsel überwiegt. Die Erweiterung der Reaktionsgleichungen auf die Anlagerungen läßt sich nur durch sukzessive Lösung der Differentialgleichungen erreichen. Um die hierbei auftretenden sieben neuen Konstanten zu bestimmen, wird für die Zahl der Rekombinationen im freien und angelagerten Zustand angenommen, daß sie sich verhalten wie das Verhältnis der Summen der Beweglichkeiten in diesen Zuständen. Die Theorie der Rekombination von Langevin, sowie die von J. J. Thomson zeigt, daß *ceteris paribus* diese Proportionalität erfüllt ist. Es ist also $\lambda^{+0,\odot}/\lambda^{+M,\odot} = (K_{+0} + K_{\odot})/(K_{+M} + K_{\odot})$, wo $\lambda^{+0,\odot}$ die Reaktionskonstante zwischen freiem positiven und Elektronenzustand und $\lambda^{+M,\odot}$ die Reaktionskonstante zwischen angelagertem positiven und Elektronenzustand und K_{+0} die freie, K_{+M} die angelagerte Beweglichkeit des positiven Trägers, K_{\odot} die Beweglichkeit des Elektrons ist. (Vgl. Nr. 15.)

9. Arbeit der Heraussprengung positiver Kerne

Der Bruchteil der Anlagerung ist durch das β_M der Formel 7, Tab. 12, der Arbeit I gegeben. Die Energie, die notwendig ist, um aus einem solchen Kondensationsprodukt, wie es hier vorliegt (es handelt sich um etwa 17 Flammenmoleküle, die das Na-Atom umgeben (I, S. 780), das Na-Atom herauszusprengen wird nach dem Vorgang von J. J. Thomson erhalten unter Benutzung einer Methode von Maxwell. Der Nutzeffekt, den hier die Stöße von hinreichender Relativenergie besitzen, ist viel größer zu erwarten, als der Nutzeffekt der Stöße, welcher im Falle der Ionisation neutraler Atome auftritt. Denn die Sprengung der positiven und negativen Ladung wird im allgemeinen durch einen Stoß nur stattfinden, wenn dieser senkrecht zu den Kraftlinien stattfindet, welche im Atom das

Elektron mit dem positiven Kern verbinden. Der relativ kleine Nutzeffekt, den Fräulein Sponer¹⁾ für die Ionisation durch die Stöße zweiter Art festgestellt hat, der in der Größenordnung durchaus mit dem hier nach Nr. 22 erhaltenen Nutzeffekt übereinstimmt, spricht dafür, daß beim neutralen Atom ein sehr kleiner Winkelbereich der Stoßrichtung zur Kraftlinienrichtung im Innern des gestoßenen Atoms wirksam ist.

Bei der Heraussprengung des geladenen Kerns aus der Kondensationshülle dagegen wird man erwarten können, daß jeder Stoß, der mit hinreichender Energie erfolgt, um die Hülle zum Abdampfen oder zum Zersprengen zu bringen, auch wirksam ist, denn der Stoß gegen den geladenen Körper ist durch die Influenzierung einer entgegengesetzten Ladung im neutralen stoßenden Molekül optimal gerichtet und beschleunigt. Es wird deshalb der Nutzeffekt für die Freimachung der positiven Kerne aus den Clustern wohl sicher nahe gleich 1 gesetzt werden können. (Vgl. hierzu Nr. 17, 22, 24.)

10. Arbeit zur Heraussprengung von Elektronen

Für die Bestimmung der Energie, welche zur Freimachung eines Elektrons, das sich an ein Gasatom angelagert hat, erforderlich ist, lassen sich die Berechnungsprinzipien, die für die positiven Träger im letzten Paragraph angegeben wurden, nicht verwerten. Denn die Annahme, daß das geladene Atom, welches Moleküle um sich herumlagert, sich wie eine geladene Kugel verhält, welche elektrische Bilder in Nachbarkugeln influenziert, ist wohl für 2 Moleküle von gleicher Größenordnung der Dimensionierung möglich, aber wegen des Dimensionsunterschiedes des Elektrons zum Molekül für Elektronen nicht möglich. Für ein Elektron verhält sich die Oberfläche eines Moleküls nicht annähernd wie eine Kugel. Eine theoretische Berechnung ist aber auch nicht erforderlich, da Experimente vorliegen, deren Deutung wohl eindeutig zu dem Wert der Energie führt, welcher zur Befreiung eines Elektrons, das in der Hülle eines Atoms stecken geblieben ist, notwendig ist. Diese Experimente sind von Åkesson²⁾ ausgeführt worden und

1) H. Sponer, Ztschr. f. Phys. 7. S. 185. 1921.

2) N. Åkesson, Lands Arskrift 12. S. 11. 1916.

zwar gerade auch für Stickstoff, Kohlensäure und Methan, die in der Flamme auftreten.

Åkesson zeigte, daß der erste unelastische Stoß, welchen Elektronen beim Eintritt in ein Gas dieser Zusammensetzung erleiden, im Mittel bei 2,5 Volt liegt. Es wird für sehr langsame Elektronen vollkommene Trägerabsorption festgestellt, für schnellere ein Geschwindigkeitsverlust von 2,5 Volt, beim Durchsetzen der äußeren Region des Gasmoleküls.

Für die Freimachung eines Elektrons, das an oder in der äußeren Hülle eines neutralen Moleküls eines Gasgemisches von CO, N, CH absorbiert ist, genügen also 2,5 Volt Stoß Energie. (Vgl. Nr. 23—25.)

11.

Zusammenfassend kann man die Überlegungen dieses Kapitels, die im nächsten Kapitel in mathematische Form gebracht werden, dahin kennzeichnen: Lediglich die *Einführung* des Zahlenwertes der Reaktionskonstante der Lichtemission der *D-Linie* ist eine *wesentlich neue Hinzunahme* zu den kinetisch-thermodynamischen Grundlagen meiner Theorie der Flammenleitung. *Alle übrigen* in Nr. 7—10 zur Erweiterung eingeführten weiteren Annahmen sind so unmittelbar aus dem thermodynamischen Reaktionsansatz [Gleichung (8) dieser, (12) der Arbeit I] einerseits, der Sahaschen Einführung der Ionisationsarbeit in die Nernstsche Reaktionsisotherme andererseits erhalten, daß sie nicht eigentlich als neue Annahmen, sondern *als erweiterte Ansätze unter gleichen Annahmen anzusehen sind*.

III. Die Gleichungen für die Reaktionskonstanten, Verweilzeiten, Rekombinationen und Wechselzahlen

In folgendem wird das Problem insofern vereinfacht, als von dem Zustande ausgegangen wird, in dem bereits NaCl in $\text{Na} + \text{Cl}$ zerfallen ist. Dann ist das Gleichgewicht durch das Schema in Nr. 7 gekennzeichnet, und die Zahl der freien, neutralen Atome ist als fest gegeben zu betrachten.

Sind N freie neutrale Alkaliatome im Kubikzentimeter vorhanden, die im Gleichgewicht sind mit

N^x -Atomen im $2p$ -Zustand

und mit

N^+ positiven Atomen und in gleicher Zahl negativen und ist die Konzentration

$$c = N/\mathfrak{N},$$

wo \mathfrak{N} die Zahl der Flammenmoleküle pro Kubikzentimeter ist, so ist, unter der Voraussetzung, daß bei dieser hohen Temperatur gegenüber dem thermodynamischen Gleichgewicht alle anderen, reaktionsbestimmenden Kräfte klein sind

$$c^\times = c e^{-h\nu/kT}$$

die Konzentration der angeregten Atome. Aus der bekannten Ionisationsspannung $h\nu$ und der Boltzmann-Planckschen Konstanten k ist demnach diese Konzentration c^\times gegeben. Ferner ist [vgl. 12 Gleichung (9)] in

$$(c^+)^2 = \alpha_{13} c$$

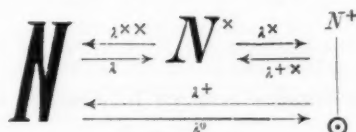
die Ionenkonzentration c^+ ebenfalls bekannt (vgl. Nr. 1 dieser Arbeit) durch die in Arbeit I aus der Sahaschen Theorie unter Zuhilfenahme der Quadratwurzelbeziehung zum Atomgewicht errechneten Dissoziationskonstanten α_{13} ; dann sind also

$$N = c \mathfrak{N}, \quad N^\times = c^\times \mathfrak{N} \quad \text{und} \quad N^+ = c^+ \mathfrak{N}$$

gegebene Größen.

12. Beziehung der Reaktions- zu den Dissoziationskonstanten

Wird zunächst von einer Anlagerung der freien, geladenen Träger an neutrale Atome abgesehen, dann haben wir die Reaktion, mit den an die Übergänge herangeschriebenen Konstanten.



Voraussetzung für dieses Schema ist, daß zwischen Grundzustand und Ionisationszustand ein Zustand, nämlich der $2p$ -Zustand, alle anderen Zwischenzustände physikalisch so weitgehend überragt, daß ihr Einfluß vernachlässigt werden kann. Dann besagt das Schema: Es sind N neutrale Atome

im Grundzustand (Zustand I) im Gleichgewicht mit N^\times -Atomen im $2p$ -Zustand (Zustand II) und mit N^+ -Trägern (Zustand III). In diesem Gleichgewichtszustand finden alsdann $N\lambda$ Anregungen des $2p$ -Zustandes, $N^\times \lambda^{\times \times}$ Rückbildungen, also D -Linien-emissionen statt. Ferner entstehen $\lambda^0 N$ -Ionisationen aus dem Grundzustand und $\lambda^+ \frac{N^{+2}}{\mathfrak{N}}$ Rekombinationen in den Grundzustand, wenn \mathfrak{N} die Zahl der Gasmoleküle pro Kubikzentimeter bedeutet (die Division durch die Loschmidtsche Zahl ist dadurch bedingt, daß die aus der Abhandlung I herübergenommenen Dissoziationskonstanten α , die zur Bestimmung der λ^+ wesentlich dienen, sich nicht auf die Zahl der Na-Atome, sondern auf Konzentrationen pro Zahl der Gasmoleküle \mathfrak{N} beziehen). Auch die Reaktionen aus dem $2p$ - in den Ionisationszustand und zurück sind durch die Konstanten λ^\times und $\lambda^{+\times}$ berücksichtigt. Dann ist im Gleichgewichtszustand:

$$(A) \quad \begin{cases} 1. \quad \frac{dN}{dt} = -(\lambda + \lambda^0) N + \lambda_{\times \times} N^\times + \lambda^+ \frac{N^{+2}}{\mathfrak{N}} = 0, \\ 2. \quad \frac{dN^\times}{dt} = \lambda N - (\lambda^\times + \lambda^{\times \times}) N^\times + \lambda^{+\times} \frac{N^{+2}}{\mathfrak{N}} = 0, \\ 3. \quad \frac{dN^+}{dt} = \lambda^\times N^\times + \lambda^0 N - (\lambda^+ + \lambda^{+\times}) \frac{N^{+2}}{\mathfrak{N}} = 0; \end{cases}$$

die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$(9) \quad \frac{N^{+2}}{N\mathfrak{N}} = \frac{e^{+2}}{e} = \alpha_{13} = \frac{\lambda \lambda^\times + \lambda^0 (\lambda^\times + \lambda^{\times \times})}{\lambda^{+\times} \lambda^{\times \times} + \lambda^+ (\lambda^\times + \lambda^{\times \times})},$$

wo α_{13} die Dissoziationskonstante (I, Tab. 10) ist. Ferner ist

$$(10) \quad \frac{N^\times}{N} = \frac{e^\times}{e} = \alpha_{12} = \frac{\lambda (\lambda^+ + \lambda^{+\times}) + \lambda^0 \lambda^{+\times}}{\lambda^{\times \times} (\lambda^+ + \lambda^{+\times}) + \lambda^\times \lambda^+} = e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}.$$

13. Zusammenhang der Gleichungen A mit der Gleichung (8) (12 der Arbeit I)

Die in der Sekunde erzeugte Ionenmenge in Gleichung (8)

$$anq(1 - \beta)$$

bezieht sich auf die Zahl n der zerstäubten Na-Atome im Kubikzentimeter die zum Teil noch im Molekülverband sind. N dagegen in den Formeln (9) und (10) ist die Zahl der freien Na-Atome. Ist y der aus der Tab. 10 der Arbeit I bekannte Dissoziationsgrad, so ist $ny = N$ und

$$(11) \quad a q (1 - \beta) = (\lambda_0 + \lambda^\times \kappa_{12}) y$$

und die Rekombinationskonstante

$$(12) \quad \alpha = \frac{\lambda^+ + \lambda^{\times\cdot}}{\mathfrak{N}},$$

demnach

$$(13) \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{(\lambda_0 + \lambda^\times \kappa_{12}) y \mathfrak{N}}{(\lambda^+ + \lambda^{\times\cdot}) q (1 - \beta)}.$$

14. Bestimmbarkeit sämtlicher Reaktionskonstanten

Die Erweiterung der Fragestellung gegenüber der der Arbeit I liegt nach Nr. 13 demnach in folgendem: Es ist mit Hilfe der drei aus den Reaktionsgleichungen (A) sich ergebenden Beziehungen zu der Dissoziationskonstanten κ_{13} bzw. der Anregungskonstanten κ_{12} die Rekombinationskonstante α zu ermitteln.

Bekannt ist

$$\kappa_{13}, \kappa_{12}, \lambda^{\times\cdot}.$$

Unbekannt ist

$$\lambda, \lambda^0, \lambda^\times, \lambda^+ + \lambda^{\times\cdot};$$

da aber die Bruchteile λ_i der in Reaktion tretenden N_i sich verhalten werden (vgl. Nr. 7) wie die Zahl der Stöße mit hinreichender Relativenergie, so treten, wenn g_i die kritischen Geschwindigkeiten sind, zu den 3 Gleichungen (A) die zwei weiteren

$$(14) \quad \frac{\lambda}{\lambda^0} = \frac{n(g^\times g^+)}{n(g^+ g^\infty)} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda^\times}{\lambda^0} = \frac{n[\sqrt{g^{+2} - g^{\times 2}}, g^\infty]}{n(g^+ g^\infty)},$$

also sind zur Bestimmung der 4 Unbekannten die 4 Gleichungen vorhanden, denn die rechten Seiten der Gleichung (14) sind aus der kinetischen Gastheorie erhältlich.

Aus der experimentellen Bestimmung der Verschiebung und derjenigen der Leitfähigkeit sind demnach bei Hinzunahme der reziproken Verweilzeit der Na-Linie, die experimentell und theoretisch bestimmbar ist, sämtliche Reaktionskonstanten in der Flamme quantitativ erhältlich unter Annahmen, die im wesentlichen die der Sahaschen Theorie sind: Also Stöße zweiter Art, in ihrer Wirksamkeit bestimmt durch die Energieniveaus der zu erreichenden Zustände.

Die beiden Gleichungen (A 1) und 2) bleiben unverändert; die Gleichung (3) aber spaltet sich dann in vier neue und zwar ist aus dem Schema abzulesen

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{d N^{+O}}{dt} &= \lambda^0 N + \lambda^{\times} N^{\times} + A_2 N^{+M} - A_1 N^{+O} \\ &\quad - \frac{\lambda^{+O, -M}}{\mathfrak{N}} N^{+O} N^{-M} - \frac{\lambda^{+O, \odot}}{\mathfrak{N}} N^{+O} N^{\odot}, \end{aligned} \right. \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{d N^{+M}}{dt} &= A_1 N^{+O} - A_2 N^{+M} - \frac{\lambda^{+M, \odot}}{\mathfrak{N}} N^{+M} N^{\odot} \\ &\quad - \frac{\lambda^{+M, -M}}{\mathfrak{N}} N^{+M} N^{-M}, \end{aligned} \right. \\
 (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{d N^{\odot}}{dt} &= \lambda_0 N + \lambda^{\times} N^{\times} + A_2' N^{-M} - A_1' N^{\odot} \\ &\quad - \frac{\lambda^{\odot, +O}}{\mathfrak{N}} N^{\odot} N^{+O} - \frac{\lambda^{\odot, +M}}{\mathfrak{N}} N^{\odot} N^{+M}, \end{aligned} \right. \\
 (4) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{d N^{-M}}{dt} &= A_1' N^{\odot} - A_2' N^{-M} - \frac{\lambda^{-M, +O}}{\mathfrak{N}} N^{-M} N^{+O} \\ &\quad - \frac{\lambda^{-M, +M}}{\mathfrak{N}} N^{-M} N^{+M}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Hier ist die Gleichung

$$(1) + (2) = (3) + (4)$$

und im Gleichgewicht ist jede der Gleichungen gleich Null. Ferner ist

$$\frac{N^{\odot}}{N^{-M}} = \left(\frac{\beta^O}{\beta^M} \right)_{-} = \delta,$$

denn β^O ist der Bruchteil der Zahl der freien Elektronen zur Zahl der freien Metallatome und β^M ist der Bruchteil der Zahl der angelagerten Elektronen zur Zahl der freien Metallatome.

Beide Zahlen sind nach I, Tab. 12, bekannt.

Außerdem ist

$$N^{+} = N^{\odot} + N^{-M}$$

demnach

$$(15) \quad N^{\odot} = N^{+} \frac{\delta}{1 + \delta}; \quad N^{-M} = N^{+} \frac{1}{1 + \delta}.$$

Eine genau gleiche Beziehung gilt für die positiven Träger, so daß, wenn

$$\left(\frac{\beta^O}{\beta^M} \right)_{+} = A$$

$$(16) \quad N^{+\odot} = N + \frac{A}{1+A}; \quad N^{+M} = N + \frac{1}{1+A}.$$

Um die Gleichungen auszuwerten, wird folgendermaßen eine sukzessive Lösung erreicht. Man setzt zunächst $A_1 = A_2 = 0$. Dadurch fällt diese Anlagerung fort. Es wird dann mit Hilfe der Beziehungen (15) und (16) N^0 und N^{-M} durch N^+ ersetzt. Dann wird ersichtlich, daß Gleichung A 3 erhalten bleibt, nur daß der Koeffizient der Rekombination sich geändert hat und zwar ist

$$(17) \quad \lambda^+ + \lambda^{+\times} = \frac{\lambda^{+, -M} + \lambda^{+, \odot} \delta}{1 + \delta}.$$

Ferner ist nach der Voraussetzung der Nr. 8

$$(18) \quad \frac{\lambda^{+, -M}}{\lambda^{+, \odot}} = \frac{K_+ + K_{-M}}{K_+ + K_{\odot}}$$

oder

$$(18') \quad \lambda^{+, -M} = \frac{K_+ + K_{-M}}{K_+ + K_{\odot}} \lambda^{\odot},$$

wo

$$\lambda^{\odot} = \frac{\lambda^+ (1 + \delta)}{\delta + \frac{K_+ + K_{-M}}{K_+ + K_{\odot}}},$$

wo K_+ die mittlere Beweglichkeit des positiven Trägers,
 „ K_{-M} „ „ „ „ negativen „
 „ K_{\odot} „ „ „ „ freien Elektrons ist.

Die unbekannten $\lambda^{+, -M}$ und $\lambda^{+, \odot}$ sind also aus der Gleichung (17) und (18') erhältlich.

Um A_2' zu erhalten, wird wieder die Stoßzahl berechnet für diejenigen Gasmoleküle, welchen das Potential der Ablösungsarbeit zukommt. Die Ablösungsarbeit wird den Experimenten des Hrn. Åkesson, wie in Nr. 10 ausgeführt wurde, entnommen. Dann ergibt die Gleichung B 4 die Größe A_1' .

Nachdem so die durch $A_1 = A_2 = 0$ vereinfachten Ausdrücke gewonnen sind, wird diese Vereinfachung aufgegeben. Dann wird

$$\lambda^+ + \lambda^{+\times} = \left[\frac{\lambda^{+, -M} A + \lambda^{+, -M}}{A + 1} \right] \frac{1}{\delta + 1} + \left[\frac{\lambda^{+, \odot} A + \lambda^{+, \odot}}{A + 1} \right] \frac{\delta}{\delta + 1}$$

nenne ich

$$(19) \quad \frac{\lambda^{+O, -M} A + \lambda^{+M, -M}}{A + 1} = A; \quad \frac{\lambda^{+O, \odot} A + \lambda^{+M, \odot}}{A + 1} = B,$$

so wird

$$\lambda^{+} + \lambda^{+\infty} = \frac{A + B\delta}{\delta + 1}.$$

Vergleicht man (17) und (19), so ist ersichtlich

$$\lambda^{+, -M} = A = \frac{\lambda^{+O, -M} A + \lambda^{+M, -M}}{A + 1};$$

$$\lambda^{+, \odot} = B = \frac{\lambda^{+O, \odot} A + \lambda^{+M, \odot}}{A + 1},$$

wobei die linken Seiten aus Gleichungen (17) und (18') gegeben sind. Ferner ist

$$(20) \quad \frac{\lambda^{+O, -M}}{\lambda^{+M, -M}} = \frac{K^{+O} + K^{-M}}{K^{+M} + K^{+M}}; \quad \frac{\lambda^{+O, \odot}}{\lambda^{+M, \odot}} = \frac{K^{+O} + K^{\odot}}{K^{+M} + K^{\odot}},$$

so daß

$$(21) \quad \lambda^{+O, -M} = \frac{\lambda^{+, -M} (A + 1)}{A + \frac{\lambda^{+M, -M}}{\lambda^{+O, -M}}} \text{ ist,}$$

wo $\lambda^{+, -M}$ aus Formel (18') zu entnehmen ist und

$$(22) \quad \lambda^{+O, \odot} = \lambda^{+M, O} = \lambda^{+, \odot}$$

wegen der Größe von K^{\odot} wird.

Außerdem ist

$$(23) \quad \frac{\lambda^0}{A_1} = \frac{n(g^{+} g^{\infty})}{n(g^{0'} g^{\infty})},$$

wo $g^{0'}$ die Relativgeschwindigkeit ist, die der Ablösungsarbeit des positiven Trägers von den angehängten Molekülen zukommt.

Man erhält also aus den Gleichungen (17), (18'), (21—23) sämtliche Rekombinationskonstanten für den freien und für den angelagerten Zustand der Träger.

Aus der relativen Stoßzahl (im Vergleich mit der Zahl der zur Ionisation führenden Stöße), welchen die Ablösungsenergie zukommt, erhält man die für die Zahl der Anhängungen und Ablösung maßgebenden Koeffizienten:

$$A_1, A_2, A_1', A_3'.$$

Daß nur bei Kenntnis aller dieser Zahlen ein quantitatives Berechnen der Stromspannungscharakteristik möglich ist, ist leicht ersichtlich und wird im letzten Kapitel behandelt.

16. Zahl der Stöße, die das Atom vom Grundzustand in höhere Energiezustände führen

Die Stoßzahl pro Sekunde, die ein Molekül m von beliebiger Geschwindigkeit mit Molekülen m_1 erfährt, wenn die Relativgeschwindigkeit g zwischen den Grenzen g_1, g_2 liegen soll, ist nach Boltzmann¹⁾, wenn σ den Stoßradius bezeichnet

$$n(g_1, g_2) = \frac{\pi}{n} \sigma^2 \int f d\omega \int F_1 g d\omega_1.$$

Die Integration nach $d\omega$ ist über alle Geschwindigkeiten ξ, η, ζ zu erstrecken und nach $d\omega_1$ über alle Werte, bei denen

$$g_1^2 < g_2^2 \quad \text{oder} \quad (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 < g_2^2$$

ist.

Nach Formel 41 und 42 bei Boltzmann ist

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = n \sqrt{\frac{h'^3 m^3}{\pi^3}} e^{-h' m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi d\eta d\zeta$$

$$F(\xi, \eta, \zeta) d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = n_1 \sqrt{\frac{h'^3 m_1^3}{\pi^3}} e^{-h' m_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1,$$

wo h' die Boltzmannsche Konstante pro Mol $h' = \frac{1}{2 R M T}$ ist. Es kommt aber nicht auf die Geschwindigkeiten, sondern auf die Relativgeschwindigkeiten an. Führt man statt der Komponenten der Geschwindigkeit, die der Relativgeschwindigkeit, welche wir x, y, z nennen ein, wo $(x^2 + y^2 + z^2) = g^2$ ist, dann wird

$$\xi_1 = \xi + x; \quad \eta_1 = \eta + y; \quad \zeta_1 = \zeta + z.$$

Die Rechnung ist bei L. Meyer, Gastheorie, S. 69 im Prinzip durchgeführt. Um zu einer für die numerische Rechnung brauchbaren Formel zu gelangen, empfiehlt sich (ein Hinweis, den ich Hrn. Kollegen Jaffé verdanke) die Einführung von weiteren Hilfskoordinaten für die Größen

$$\sqrt{m + m_1} \xi + \frac{m_1}{\sqrt{m + m_1}} C \quad \text{und} \quad \frac{m m_1}{m + m_1} = \mu.$$

Man erhält dann nach einiger Rechnung die Gleichung

$$n(g_1, g_2) = 2 n_1 \pi \sigma^2 \sqrt{\frac{h' \mu}{\pi}} \left\{ \left| g^2 e^{-h' \mu g^2} \right|_{g_2} + \frac{1}{h' \mu} \left| e^{-h' \mu g^2} \right|_{g_2} \right\}.$$

1) L. Boltzmann, Gastheorie, Formel 59. S. 67.

Wenn h' die Boltzmannsche Konstante pro Mol, h die Boltzmann-Plancksche Konstante pro Molekül ist, so ist

$$h' \mu g^2 = \frac{h \nu}{k T},$$

wo h die Plancksche Wirkungskonstante ist. Dann wird

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} n(g^\times g^\infty) &= \frac{2 \sqrt{\pi} n_1 \sigma^2}{\sqrt{h' u}} \\ &\left[\left(\frac{h \nu_{1,2}}{k T} + 1 \right) e^{-h \nu_{1,2}/k T} - \left(\frac{h \nu_{1,3}}{k T} + 1 \right) e^{-h \nu_{1,3}/k T} \right]. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet $h \nu_{1,2}$ die Energie, die vom Grundzustand aus das Atom auf den $2p$ -Zustand hebt, $h \nu_{1,3}$ die Energie, die es bis zum Ionisationszustand hebt.

Bei Anwendung der Formel ist zu beachten, daß der Stoßradius σ im $2p$ -Zustand wesentlich größer als im Grundzustand ist. Ferner ist in $e^{h \nu/k T}$ bei der Ionisation nicht der unveränderte Wert für $h \nu_{1,3}/k T$ einzusetzen, der sich für ein Atom mit konstant bleibender spezifischer Wärme und konstant bleibender chemischer Konstante ergibt, sondern der Wert, der die Änderung dieser Größen berücksichtigt und sich aus der Nernstschen Reaktionsisotherme errechnet, also nicht

$$e^{h \nu/k T}, \text{ sondern } e^{h \nu/k T - z} = \alpha_{13},$$

wenn α_{13} der nach Saha unter Hinzufügung meiner Bedingungsgleichung $\sqrt{x y} \sim A$ errechnete Dissoziationsgrad ist (vgl. Nr. 7 dieser Arbeit). Es ist deshalb die Energie

$$h \nu_{1,3}/k T - z$$

für die Trägerbefreiung einzusetzen, wenn $h \nu_{1,3}/\varepsilon$ das Ionisierungspotential, ε die Elementarladung darstellt.

17. Nutzeffekt

Wie in Nr. 9 angegeben und in 24 ausgeführt wird, kann nur im Falle der Sprengung von Kondensationsprodukten (Anhängungen) die Stoßzahl $n(g, g)$ mit dem Wirkungsgrad 1 wirkend angenommen werden. Der Wirkungsgrad in allen übrigen Fällen ist dadurch bedingt, daß nach Formel (10) sich ein Wert von α_{12} ergibt, der wegen der Kleinheit von λ^\times gegen λ^\times angenähert ist,

$$\alpha_{12} = \lambda / \lambda^\times,$$

wo $\kappa_{12} = e^{-h\nu_{12}/kT}$ bekannt, und $\lambda^{\times\times}$ ebenfalls gegeben ist. Da nun

$$\lambda/\lambda_0 = n(g^{\times}g^{+})/n(g^{+}g^{\infty})$$

ist, so ist $\kappa_{12}\lambda^{\times\times} = \lambda$ und der Nutzeffekt $\mathfrak{N}u = \frac{\lambda^0}{n(g^{+}g^{\infty})}$ ist damit festgelegt, da $n(g^{\times}g^{+})$ und $n(g^{+}g^{\infty})$ gegeben sind, also λ_0 quantitativ bestimmt ist. Damit ist dann auch der Nutzeffekt der 2p-Anregung

$$\mathfrak{N}u = \frac{\lambda}{n(g^{\times}g^{+})}$$

gegeben.

18. Verweilzeiten, Halbzeiten und Zustandswechsel

Die mittlere Verweilzeit ϑ der Atome in einem Energiezustand ist durch die Zeit definiert, in der die Zahl dieser Atome auf den e^{ten} Teil gesunken ist.

Handelt es sich um die Umwandlung, die nur in einer Richtung, also nur nach geringerer Energie oder nur nach zunehmender stattfindet, so ist für eine Reaktion erster Ordnung

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda}.$$

Handelt es sich aber um eine Umwandlung zweiter Ordnung, so hängt die Verweilzeit von der Konzentration ab. Denn bedeutet c die Konzentration der Na-Atome in bezug auf die Gasatome $c = \frac{N}{\mathfrak{N}}$, und $c^{+} = \frac{N^{+}}{\mathfrak{N}}$ die Ionenkonzentration, so ist

$$\frac{dc^{+}}{dt} = -\lambda^{+}c_{+}^2.$$

Demnach

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda + c^{+}} = \frac{\mathfrak{N}}{\lambda + N^{+}} = \frac{1}{\alpha N^{+}}.$$

Wenn \mathfrak{N} die Loschmidtsche Zahl bedeutet.

Geht die Atomveränderung sowohl nach einer Reaktion ersten Grades wie zweiten Grades vor sich, so wird ϑ von der Form

$$\vartheta = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dN}{\frac{\alpha}{b} N + N^2} = \frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \frac{\alpha(e-1)}{b N + \alpha} \right),$$

wenn α den Proportionalitätscharakter der linearen b den der quadratischen Abhängigkeit bezeichnet.

Bei Umwandlung in mehrere Richtungen ist die Verweilzeit gleich der reziproken Summe der λ bzw. der λc_{+} .

Die Zustandswechsel sind nach Erhalt der Reaktionskonstanten sofort angebbar. Sie sind gleich der Summe der absoluten Beträge der Gleichgewichtsgleichungen $A + B$.

IV. Die numerische Auswertung unter Zugrundelegung einer Konzentration von $6,28 \cdot 10^{13}$ NaCl Molekülen bei 2000°

19. Die Zahl der Atome in den verschiedenen Zuständen

Nach der Tab. 10 der Arbeit I ist für diese Na-Konzentration folgende Tabelle gültig:

Tabelle 1

Dissoziationsgrad und Ladungszahl für $6,28 \cdot 10^{13}$ Na-Atome

$$\begin{aligned} y: \text{NaCl} &\rightleftharpoons \text{Na} + \text{Cl} = 0,4 \\ x: \text{Na} &\rightleftharpoons \text{Na}^+ + \ominus = 1 \cdot 10^{-3} \\ \text{Dissoz. Konstante } \alpha^{18} &= 7,13 \cdot 10^{-12} \\ (\beta_0)_- &= 2,127 \cdot 10^{-2} \\ (\beta_M)_- &= 10,97 \cdot 10^{-2} \\ (\beta_0)_+ &= 2 \cdot 10^{-3} \\ (\beta_M)_+ &= 1,25 \cdot 10^{-1} \\ (\beta_0/\beta_M)_- &= \delta = 19,38 \cdot 10^{-2} \\ (\beta_0/\beta_M)_+ &= \Delta = 1,563 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich aus den Gleichungen (15) und (16)

Tabelle 2

Zahl der Atome in den Gleichgewichtszuständen

$$\begin{aligned} N &= 2,64 \cdot 10^{13} \\ N^\times &= 1,37 \cdot 10^3 \\ N^+ &= 2,64 \cdot 10^{10} \\ N^\ominus &= 4,28 \cdot 10^9 \\ N^{-M} &= 2,21 \cdot 10^{10} \\ N^{+M} &= 2,6 \cdot 10^{10} \\ N^{+O} &= 4,06 \cdot 10^3 \\ \mathfrak{N} &= 3,67 \cdot 10^{13} \end{aligned}$$

Hier bedeutet

- N die Zahl der freien Na-Atome im Grundzustand,
- N^\times die Zahl der freien Na-Atome im angeregten Zustand,
- N^{+O} die Zahl der freien Na-Atome im freien, $+$ -geladenen Zustand,
- N^{+M} die Zahl der freien Na-Atome im angelagerten $+$ -Zustand,
- N^\ominus, N^{-M} die Zahl der freien Elektronen und der angelagerten Elektronen,
- \mathfrak{N} die Zahl der Gasmoleküle im cm^3 .

20. Die Reaktionskonstante des $2p$ -Zustandes

Die Berechnung der λ_i beruht nun vollständig auf der Zahl $\lambda^{\times\times}$, also der Reaktionskonstante des $2p$ -Zustandes. Nach Ladenburg-Reiche¹⁾ würde aus der Theorie der Dispersionskonstanten $\lambda^{\times\times}$ gleich dem dreifachen der Dämpfungskonstanten des Leuchtelektrons sein. Wenn man die H. A. Lorenzsche Berechnung dieser Zahl zugrunde legt, nämlich

$$\lambda^{\times\times} = \frac{8\pi^2 e^2 v_0^2}{3mc^3} = 6,45 \cdot 10^7,$$

demnach

$$\vartheta^{\times\times} = 1/\lambda^{\times\times} = 1,55 \cdot 10^{-8}.$$

Neuerdings wurde aber experimentell von Ellett²⁾ der Wert

$$\vartheta^{\times\times} = 1,35 \cdot 10^{-8}$$

$$\lambda^{\times\times} \text{ also } 7,4 \cdot 10^7$$

erhalten, während von Kerschbaum in seiner Dissertation bei W. Wien

$$\vartheta^{\times\times} = 3,7 \cdot 10^{-8}$$

gefunden wurde. Es ist sehr wahrscheinlich, daß nach beiden Methoden nicht die gleiche physikalische Größe gemessen wird. Die Verweilzeit, welche physikalisch gemessen ist, kann sich ja sowohl beziehen auf die mittlere Existenzdauer des angeregten Zustandes als auch auf die mittlere Dauer der Strahlung, welche vom angeregten Zustand emittiert wird wie auf die Summe beider Größen. Wahrscheinlich bezieht sich die kürzere Zeit, welche Ellett erhalten hat, auf die mittlere Dauer des $2p$ -Zustandes, nicht aber auf die Gesamtdauer beider Zustände und auch nicht auf die Dauer der Strahlung selbst. Für uns kommt deshalb der Ellettsche kurze Wert allein in Frage.

21. Die numerischen Werte der maßgeblichen Stoßzahlen

Zur Berechnung der Stoßzahlen sind folgende Ionisationspotentiale zugrunde gelegt.

Aus dem Grundzustand in den $2p$ -Zustand 2,09 Volt,

„ „ „ „ „ „ ionis. „ 5,11 „

1) R. Ladenburg und F. Reiche a. a. O.

2) A. Ellett, Journ. of opt. Soc. of Am. u. Rev. of Scient. Instr. 10. S. 427. 1925.

dann wird mit

$$\begin{aligned} h &= 6,55 \cdot 10^{-27} & h' &= \frac{1}{2} k T \\ k &= 1,37 \cdot 10^{-16} & \mu &= \frac{18 \cdot 23}{18 + 23} \text{ } ^1) \\ T &= 2000^0 & \sigma &= (1,77 + 1,23) \cdot 10^{-8} \text{ } ^1) \\ e &= 4,77 \cdot 10^{-10} & \sigma_{2p} &= 5,93 \cdot 10^{-8} \text{ } ^1) \\ \kappa_{13} &= 7,12 \cdot 10^{-12} \end{aligned}$$

Für

$$\begin{aligned} \left(\frac{h \nu}{k T} \right)_{2p} &= 12,17 \\ \left(\frac{h \nu}{k T} \right)_{+} &= 25,67 \\ \left(\frac{h \nu}{k T} \right)_{+} - z &= 17,53. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich als Stoßzahl, die ausreicht, um den betreffenden Quantenzustand zu erreichen, nach Gleichung (24) für den 2p-Zustand

$$n(g^{\times} g^{+}) = 1,46 \cdot 10^5.$$

Hier bedeutet $n(g^{\times} g^{+})$, daß es sich um die Stoßzahl n als Funktion der Geschwindigkeiten handelt, die zwischen der Elektronengeschwindigkeit 2,09 Volt und 5,11 Volt liegt.

Für den Ionisationszustand aus dem Grundzustand

$$n(g_{+} g_{\infty}) = 4,11 \cdot 10^{-1},$$

für den Ionisationszustand aus dem 2p-Zustand

$$n(\sqrt{g_{+}^2 - g_{\times}^2}, g_{\infty}) = 3,79 \cdot 10^3,$$

wo $g_{+} g_{\infty}$ die Geschwindigkeiten zwischen 5,11 Volt und ∞ bedeuten und $(g_{+} - g_{\times}) g_{\infty}$ Geschwindigkeiten zwischen 3,02 Volt und ∞ bedeuten.

22. Der Nutzeffekt der Stöße

Nach 17 verhalten sich die Reaktionskonstanten wie die Stoßzahlen mit der für die Reaktion hinreichenden Energie, also

$$\frac{n(g_{\times} g_{+})}{n(g_{+} g_{\infty})} = \frac{\lambda}{\lambda_0}; \quad \frac{n[\sqrt{g_{+}^2 - g_{\times}^2}, g_{\infty}]}{n(g_{+} g_{\infty})} = \frac{\lambda^{\times}}{\lambda^0}.$$

Da aber λ gegeben ist und zwar

¹⁾ Vgl. Arbeit I.

$$\lambda = \kappa_{12} \lambda^{\times \times} = 3,837 \cdot 10^2,$$

so ist der Nutzeffekt der Reaktion nicht gesondert zu berechnen, sondern

$$(\mathfrak{N}u)^{\times} = \frac{\lambda}{n(g^{\times} g^{+})} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{N}u)^{+} = \frac{\lambda^0}{n(g^{+} g^{\infty})} + \frac{\lambda \frac{N^{\times}}{N}}{n[\sqrt{g_+^2 - g^{\times 2}}, g_{\infty}]}$$

also festgelegt. Es wird

$$(\mathfrak{N}u)^{\times} = (\mathfrak{N}u)^{+} = 2,6 \cdot 10^{-3}$$

die Ausbeute der Stöße, die sich hier ergibt, ist für die Ionisation nicht größer als für die Anregung des $2p$ -Zustandes, da der zweite Summand von der Größe $1,3 \cdot 10^{-8}$ ist.

Der Nutzeffekt, den Frl. Sponer¹⁾ aus ihren Versuchen über die Anregung der Quecksilber-Resonanzlinie durch Elektronen erhalten hat, beträgt etwa $4 \cdot 10^{-3}$. Bei höheren Temperaturen und Stößen von Flammenmolekülen wird der wirksame Stoßwinkel offenbar kleiner zu erwarten sein. [Hierauf kommen wir in 30 zurück].

23. Theoretische Schätzung und experimentelle Werte der Absprengeungsenergie bei positiven Trägern

Die Na-Atome sind nach (I, 780) während der Dauer von 98,5 Proz. des Ladungszustandes mit Anlagerungen von Flammenmolekülen bis zu einem mittleren Durchmesser von $2,46 \cdot 10^{-8}$ umgeben. Der Radius des Na-Atoms ist $b = 1,77 \cdot 10^{-8}$. Die Trennungsarbeit, die erforderlich ist, um eine ungeladene Kugel mit einem Radius a von einer geladenen Kugel mit dem Radius b zu trennen, wenn beide Kugeln sich berühren, ist nach Maxwell²⁾

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{a+b} - \left\{ 2\gamma + \psi\left(\frac{b}{a+b}\right) + \psi\left(\frac{a}{a+b}\right) \right\} \frac{ab}{a+b} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{b},$$

wo

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(1+x)$$

und Γ die Gammafunktion ist. Diese Maxwellsche Beziehung ist auf molekulare Anhängungen zuerst von I. I. Thomson³⁾

1) H. Sponer, Ztschr. f. Phys. 7. S. 198. 1921.

2) Vgl. Cl. Maxwell, Elektrizität und Magnetismus I, S. 275.

3) J. J. Thomson, Cond. of El. thr. G. II S. 27. [Dort fehlt der Faktor $ab/[a+b]$ im Nenner].

angewendet worden. Der Radius des angelagerten Atoms ist in unserem Fall $a = 4,23 \cdot 10^{-8}$, der Radius des herauszusprengenden freien Na-Atoms $b = 1,77 \cdot 10^{-8}$. Für die Gammafunktion stehen Tafeln von Emde-Jahnke für die in Betracht kommenden Argumente zur Verfügung. Die so berechnete Arbeit setzen wir gleich der für das stoßende Molekül zu verlangenden Energie, dann ist im üblichen Geschwindigkeitsmaß

$$h\nu = 4,45 \cdot 10^{-12} = 2,79 \text{ Volt} \quad \text{und} \quad \frac{h\nu}{kT} = 16,24.$$

Die ausgeführte Rechnung wird nicht viel mehr als die Größenordnung der kinetischen Energie ergeben, die erforderlich ist, um den geladenen positiven Kern aus der Umlagerung neutraler Moleküle herauszusprengen.

Der erhaltene Wert zeigt sich aber in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von Åkesson¹⁾, die sich allerdings auf die Befreiung festgehaltener Elektronen, nicht auf Heraussprengung positiver Kerne beziehen. Åkesson erhielt nahezu gleiche Werte wie die hier errechneten für den unelastischen Stoß, den ein Elektron beim *Durchtritt* durch größere Gasmoleküle, wie Methan, CO und andere Gase erleidet. Dieser unelastische Stoß erfolgte bei *jedem Durchtritt* des Elektrons und äußerte sich in keiner optisch oder elektrisch wahrnehmbaren Änderung der Quantenbahnen, sondern lediglich in dem Geschwindigkeitsverlust des Elektrons bei dem Passieren der Hüllen des Moleküls. Dieser Geschwindigkeitsverlust beim Durchtritt wird sich nicht wesentlich unterscheiden (in Volt ausgedrückt) von dem Energieverlust (wieder in Volt ausgedrückt), der zur Freimachung des Elektrons erforderlich ist.

24. Nutzeffekt der Stöße bei vorhandener und bei fehlender Ladung

Findet nun ein Stoß zweiter Art gegen ein geladenes Molekül statt, so wird dieser in seiner Wirksamkeit sich wesentlich unterscheiden von einem Stoß gegen ein ungeladenes Molekül. Der geringe Nutzeffekt, der sich beim Stoß neutraler Gasmoleküle auf neutrale Na-Atome in 22 ergab, ist dadurch

1) N. Åkesson, Lunds Arskrift 12. S. 11. 1916.

bedingt, daß nur im kleinen Winkel, um die zentrale Richtung, der Stoß die hinreichende Energie übermittelt. Ist nun eines der Atome, entweder das stoßende oder das gestoßene, geladen, wie im Falle der Experimente des Herrn Åkesson und in dem hier betrachteten Fall der Sprengung der Anlagerungen, so wird der Stoß durch die elektrische Anziehung im allgemeinen zentral erfolgen und es wird schon aus diesem Grunde ein viel größerer Nutzeffekt für die Umwandlung der kinetischen Energie der Stöße zu erwarten sein, als im Falle des Zusammenstoßes neutraler Moleküle.

Weiter aber ist bei Anwendung der Stoßformel die Beschleunigung noch nicht mit in Ansatz gebracht, die ein geladenes Atom bei Annäherung an das ungeladene durch die Influenzierung der entgegengesetzten Ladung erfährt. Wir wissen aber aus der Theorie der Rekombinationen, wie sie von Langevin oder J. J. Thomson oder Townsend entwickelt wurde, daß die elektrostatischen Kräfte die Begegnungszahl um ein vielfaches erhöhen können. Würde diese Beschleunigung berücksichtigt, so würde man für die kinetische Energie der Stöße zweiter Art, welche zur Abspaltung ausreicht, wesentlich geringere Werte erhalten. *Es wird deshalb sowohl wegen der als Folge der elektrostatischen Anziehung hinzukommenden kinetischen Energie, als auch wegen der zentralen Richtkraft des influenzierten Feldes der Nutzeffekt außerordentlich gesteigert gegenüber zwei ungeladenen, sich stoßenden Molekülen. Bei Annahme des Wertes 2,3 Volt als Sprengungsenergie wird angenommen werden können, daß nahezu jeder stattfindende Stoß auch wirksam zur Sprengung führt.*

25. Zahlenwerte der A_1, A_2, A_1', A_2'

Berechnet man unter Zugrundelegung von $\frac{h\nu}{kT} = 16,24$ die Zahl der Stöße, welche gleich oder größer an Energie sind, als dieser Wert, so ergibt sich $n(g_{A_1}, g_{\infty}) = 3,25 \cdot 10^3$. Ist der Nutzeffekt gleich 1 entsprechend den Ausführungen der vorigen Nr. 24, so ist die Reaktionskonstante, welche die angelagerten N^{+M} positiven Träger in die freien N^{+0} zurückführt, also

$$A_2 = 3,25 \cdot 10^3.$$

Aus Gleichung (B 2) folgt für das Gleichgewicht $\frac{dN^{+M}}{dt} = 0$

$$A_1 = A_2 \frac{1}{A} + \lambda^{+M, \odot} \frac{N^{\odot}}{q} \frac{1}{A} - \lambda^{+M, -M} \frac{1}{A} \frac{N^{-M}}{q},$$

die $\lambda^{+M, \odot}$ und $\lambda^{+M, -M}$ sind aus den Formeln 17—18', 21—23 erhältlich (vgl. Nr. 26). Man erhält wegen der Kleinheit der zwei letzten Summanden

$$A_1 = A_2/A = 2,08 \cdot 10^5.$$

Eine ähnliche Rechnung, wie sie oben nach Maxwell für die positiven Träger ausgeführt wurde, läßt sich für Elektronen nicht ausführen, weil die Annahme, daß sich die zwei stoßenden Massen wie zwei Kugeln verhalten, auch nicht mehr annäherungsweise erfüllt ist, wenn ein Elektron sich gegen ein Flammenmolekül bewegt. — In diesem Falle aber sind die Beobachtungen von Herrn Åkesson über den Geschwindigkeitsverlust, die oben für die positiven zum Vergleich herangezogen wurden, direkt anwendbar. Åkesson findet nämlich als Mittelwerte für CH_4 , CO_2 , CO und N den Wert 2,5 Volt. Es wird dann die Zahl der Stöße, welche die angehängten Elektronen freimachen können, gegeben durch

$$n(g_{A_1}, g_x) = 3,35 \cdot 10^6,$$

und da der Nutzeffekt gleich 1 anzunehmen ist, wird

$$A_2' = 3,35 \cdot 10^5.$$

Es wird analog wie bei A_1 der Wert

$$A_1' \sim A_2'/\delta = 1,73 \cdot 10^6.$$

Es ergibt sich also folgende Tabelle:

Tabelle 3

Reaktionskoeffizienten der Anlagerung

$$A_1 = 2,08 \cdot 10^5$$

$$A_2 = 3,25 \cdot 10^3$$

$$A_1' = 1,73 \cdot 10^6$$

$$A_2' = 3,35 \cdot 10^5$$

26. Zahlenwerte der λ

Nach 22 ergeben sich zunächst die Konstanten

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 3,56 \cdot 10^5.$$

Da nun die Konstante λ festgelegt ist, ergibt sich folgende Tabelle.

Tabelle 4

Reaktionskoeffizienten für die Quantenzustände

$(2s \rightarrow 2p) \dots \lambda$	$= 3,81 \cdot 10^3$
$(2s \rightarrow \pm) \lambda^0$	$= 1,08 \cdot 10^{-3}$
$(2p \rightarrow \pm) \lambda^\times$	$= 9,938$
$(\frac{2s}{2p} \leftarrow \pm) \lambda^+ + \lambda^{+\times}$	$= 1,58 \cdot 10^3$

Die Rekombination ist in $\lambda^+ + \lambda^{+\times}$ der Tab. 4 noch nicht unterteilt auf die freien und angelagerten Zustände. Hier sind die Formeln 20—22 anzuwenden. Nach der Arbeit I, S. 778, Tab. 16 ist die mittlere Beweglichkeit $K^+ = 8,3$ und nach Tab. 15 und 17, $K^{+0} = 43,14$, $K^{+M} = 7,35$. Für die Beweglichkeit der Flammenmoleküle bei einfacher Ladung ist $K^{-M} \sim 8,3$. Für das freie Elektron ist $K^\ominus = 47000$. Dann wird nach den Formeln (18—20)

Tabelle 5

Reaktionskoeffizienten der Rekombination der freien und angelagerten Träger

$2s \leftarrow +, \ominus$	$= \lambda^+, \ominus$	$= 9,74 \cdot 10^3$
$2s \leftarrow +, -M$	$= \lambda^+, -M$	$= 3,44 \cdot 10^5$
$2s \leftarrow +O, -M$	$= \lambda^+ O, -M$	$= 1,08 \cdot 10^6$
$2s \leftarrow +O, \ominus$	$= \lambda^+ O, \ominus$	$= 9,74 \cdot 10^3$
$2s \leftarrow +M, -M$	$= \lambda^+ M, -M$	$= 3,33 \cdot 10^5$
$2s \leftarrow -M, \ominus$	$= \lambda^+ M, \ominus$	$= 9,74 \cdot 10^3$

Die Bedeutung der Indices ist oben Nr. 15 auseinandergesetzt. Hiermit sind sämtliche Reaktionskoeffizienten des erweiterten Schemas in Nr. 15 quantitativ bestimmt.

27. Die Verweilzeiten in den Quantenzuständen

Die Differentialgleichungen A 1—3 und B 1—4 bestimmen die Zeit, in welcher die Variable N^i auf einen bestimmten Bruchteil abnimmt, wenn man entweder die Summe der Abnahmeglieder oder die diesen numerisch gleichen Zunahmeglieder gleich Null setzt. Die Zeit, in der die Variable

auf den e^{ten} Teil abnimmt, wird als Verweilzeit bezeichnet. Nach der Gleichung der Nr. 18 ergibt sich alsdann folgende Tabelle.

Tabelle 6

Verweilzeiten

Die Verweilzeit des Normalzustandes	$\vartheta_N = \frac{1}{\lambda + \lambda_0} = 2,61 \cdot 10^{-8}$
„ „ „ 2p-Zustandes	$\vartheta^{\times} = \frac{1}{\lambda^{\times} + \lambda^{\times \times}} = 1,35 \cdot 10^{-9}$
„ „ „ Ionenzustandes im Mittelwert	$\vartheta^{+} = \frac{1}{(\lambda^{+} + \lambda^{+ \times}) N^{+}} = 0,884$
„ „ „ freien Ionen- zustandes	$\vartheta^{+0} = \frac{1}{A_1} \lg \left(1 + \frac{A_1(e-1)}{b N^{+0} + A_1} \right)$
wo $b = \frac{\lambda^{+0} - M}{N} \frac{A + 1}{A}$ ist.	
Dies ergibt aber, da $b N^{+0}$ klein gegen A_1 ist	$\vartheta^{+0} = \frac{1}{A_1} = 4,8 \cdot 10^{-8}$
Die Verweilzeit des angelagerten +-Zustandes	$\vartheta^{+M} = \frac{1}{A_2} = 3,07 \cdot 10^{-4}$
die des angelagerten negativen	$\vartheta^{-M} = \frac{1}{A_2'} = 2,98 \cdot 10^{-6}$
„ „ freien Elektronenzustandes	$\vartheta^{\ominus} = \frac{1}{A_1'} = 5,79 \cdot 10^{-7}$

28. Zustands- und Ladungswechsel der Metallatome in der Flamme bei der Konzentration $6,28 \cdot 10^{13}$ NaCl-Moleküle pro cm^3

Die Zahl des Zustandswechsels W_N des einzelnen freien Na-Atoms, von denen $N = yn$ vorhanden sind, wenn n die Zahl der mit der Salzlösung zerstäubten Salzmoleküle, y der Dissoziationsgrad ist, ist gegeben durch die Summe der Absolutwerte der Gleichung A 1, also durch

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda + \lambda_0) + \lambda^{\times \times} \frac{N^{\times}}{N} + \lambda^{+} \frac{N^{+}}{N}$$

oder bei einzelner Einsetzung der Summanden

$$W = (3,837 \cdot 10^2 + 1,08 \cdot 10^{-3}) + 385 + 1,1 \cdot 10^{-3}.$$

Es wechselt also das einzelne freie Na-Atom 770mal in der Sekunde seinen Zustand. Diese Zustandswechsel erfolgen aber nur mit ganz verschwindendem Prozentsatz durch Übergänge in den geladenen Zustand. Nur jedes 450. freie Na-Atom wechselt in der Sekunde aus dem Ionisationszustand in den

neutralen Zustand oder aus dem neutralen in den geladenen $W_+ = 1,1 \cdot 10^{-3}$, während jedes einzelne freie Na-Atom 769mal in der Sekunde zwischen $2p$ -Zustand und Normalzustand wechselt. Oder anders ausgedrückt: Das einzelne Na-Atom wird nur alle 7,5 Minuten einmal zum Ion oder ein Ion verliert nur alle 7,5 Minuten einmal seine Ladung. *Der Ladungswechsel in der Flamme ist also bei der Zerstäubung, die zu obiger Konzentration führt, ein äußerst seltener Vorgang.*

Der Zusammenhang der Ladungszahlen mit den Wechselzahlen ist dann, wie leicht ersichtlich,

$$\beta = \frac{W^+ \vartheta^+}{W_N \vartheta_N + W^+ \vartheta^+} \frac{y}{q} \text{ oder } \frac{W^+ \vartheta^+}{W_N \vartheta_N + W^+ \vartheta^+} = x = \frac{N^+}{N + N^+}$$

Ist β gleich 1, so wird $xy = q$.

Fragt man aber nach der Zahl der Zustandswechsel der positiven oder der negativen Träger, also nicht nur nach den Wechseln der Ladung, sondern auch nach denen der Anlagerung, so geben hierüber die Gleichungen B Auskunft. Es muß jede Änderung mit dem absoluten Betrage, wie oben bereits ausgeführt, eingesetzt werden. Dann ist

$$W_+ = \frac{dN^{+0}}{dt} + \frac{dN^{+M}}{dt} = 4,06 \cdot 10^5,$$

wobei

$$\begin{aligned} W^{+0} &= \frac{dN^{+0}}{dt} = \lambda_0 \frac{N}{N^{+0}} + \lambda^{\times} \frac{N^{\times}}{N^{+0}} + \frac{A_2}{A} + A_1 \\ &\quad + \frac{\lambda^{+0, -M} N^{-M}}{\Re} + \frac{\lambda^{+0, \odot} N^{\odot}}{\Re} \\ &= 66 + 4 + 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^{-3} + 1,1 \\ &= 4 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{+M} &= \frac{dN^{+M}}{dt} = A_{1A} + A_2 + \frac{\lambda^{+M, \odot}}{\Re} N^{\odot} + \frac{\lambda^{+M, -M}}{\Re} N^{-M} \\ &= 3,2 \cdot 10^3 + 3,2 \cdot 10^3 + 1,1 + 2 \cdot 10^{-3} \\ &= 6,4 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

$$W^- = \frac{dN^{\odot}}{dt} + \frac{dN^{-M}}{dt} = 4 \cdot 10^6 \quad \text{und}$$

$$W^{\odot} = \frac{dN^{\odot}}{dt} = \lambda_0 \frac{N}{N^{\odot}} + \lambda^{\times} \frac{N^{\times}}{N^{\odot}} + A_2' \frac{1}{\delta} + A_1' + \frac{\lambda^{\odot, +O} N^{+O}}{\mathfrak{N}} + \frac{\lambda^{\odot, -M} N^{-M}}{\mathfrak{N}}$$

$$\text{oder} \quad = 184 + 0,32 + 1,7 \cdot 10^6 + 1,7 \cdot 10^6 + 0,1 + 6,9 = 3,4 \cdot 10^6$$

$$W^{-M} = \frac{dN^{-M}}{dt} = A_1' \delta + A_2' + \frac{\lambda^{+M, +O}}{\mathfrak{N}} N^{+O} + \frac{\lambda^{-M, +M}}{\mathfrak{N}} N^{-M}$$

$$\text{oder} \quad = 3,35 \cdot 10^5 + 3,35 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^{-4} + 2,5 \cdot 10^{-3} = 6,7 \cdot 10^5$$

Die Zahl der Wechsel beträgt also

Tabelle 7

Zahl der Wechsel der einzelnen Atomzustände pro Sek.

Freies Na-Atom mit 2p-Zustand	= 769
Freies Na-Atom mit + oder - Zustand	= $2,2 \cdot 10^{-3}$
Der freien positiven Träger W^{+O}	= $4 \cdot 10^6$
Der freien negativen Träger W^{\odot}	= $3,4 \cdot 10^6$
Der angelagerten positiven W^{+M}	= $6,3 \cdot 10^3$
Der angelagerten negativen W^{-M}	= $6,7 \cdot 10^5$

Es erleidet also ein einzelnes Atom, das im freien + Zustand ist, $4 \cdot 10^6$ Wechsel seines Zustandes, das im angelagerten nur $6 \cdot 10^3$, und es erleidet das Elektron im freien Zustand $3,4 \cdot 10^6$ Wechsel und das im angelagerten Zustand $6,7 \cdot 10^5$. Die Zahl sämtlicher Wechsel in den übrigen Gleichgewichtszuständen des Na-Atoms ist aus den Zahlenwerten, welche unter den einzelnen Summanden der Gleichungen geschrieben sind, unmittelbar abzulesen. Die Rekombinationen treten überall vollkommen hinter den Anlagerungen zurück.

29. Die Rekombinationszahlen und der Nutzeffekt der Wiedervereinigung

Nach Nr. 13 Formel (12) ist die Rekombinationskonstante (noch nicht unterteilt auf freien und angelagerten Zustand) gegeben durch

$$\alpha = \frac{\lambda^{+} + \lambda^{+ \times}}{\mathfrak{N}},$$

wenn λ^+ die Reaktionskonstante der Wiedervereinigung in den Normalzustand, $\lambda^{+\infty}$ die der Wiedervereinigung in den $2p$ -Zustand, \mathcal{N} die Loschmidsche Zahl pro cm^3 ist. Nach Tab. 4 ist

$$\alpha = \frac{1,585 \cdot 10^9}{3,7 \cdot 10^{18}} = 4,28 \cdot 10^{-11}.$$

Die so erhaltene unzerlegte Rekombinationskonstante ergibt sich also auf Grund der Voraussetzung, die oben in Kap. II diskutiert ist. Fragt man andererseits, welche theoretische Voraussage etwa die kinetische Theorie der Rekombination vor I. I. Thomson¹⁾ ergibt, so hat man folgende Rechnungen anzustellen:

Ist T die kinetische Energie von 2 Ionen,

N die Zahl der Moleküle bei Atmosphärendruck und 0°C. ,

p der Druck von einer Atmosphäre,

so ist $p = \frac{1}{3} NT$ und $T = \frac{3p \cdot 2000}{N \cdot 273}$. Damit Rekombinationen eintreten kann, muß die kinetische Energie der Molekularbewegung kleiner sein als das Anziehungspotential. Es muß also für die Entfernung r , in der dies eintritt, die Bedingung erfüllt sein $\frac{e^2}{r} > T$ oder $r < \frac{e^2}{T}$. Mit $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ wird $\frac{e^2}{T} = 2,8 \cdot 10^{-7}$. Erst in der Entfernung $r = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ ist die kinetische Energie gleich der potentiellen. Um in diesen Abstand zu kommen, brauchen die beiden Träger entgegengesetzten Vorzeichens eine Zeit, die von der mittleren Relativgeschwindigkeit beider Träger abhängt. Ist V ihre Größe, so ist der Weg, den ein Ion in der Zeit t relativ zu einem anderen beschreibt, Vt . Konstruieren wir demnach einen Zylinder dieser Länge mit dem Radius R , den wir so bemessen, daß jeder Zusammenstoß in dem Zylinder zur Rekombination führen kann, und nehmen wir an, daß keine Richtung des Zusammenpralls bevorzugt ist, so ist der Radius dieses Zylinders

$$R = \frac{\pi}{4} r = 2,2 \cdot 10^{-7}.$$

Bei einer Konzentration von n -Trägern eines Vorzeichens

1) I. I. Thomson, Cond. of. El. thr. G. II, 90, S. 25.

gelangen während der Zeit t , $n \pi R^2 V t$ Träger in den Zylinder. Die Zahl der Rekombinationen ist dann in der Sekunde

$$n^2 \pi R^2 V.$$

Demnach ist

$$\alpha = \pi R^2 V = 1,52 \cdot 10^{-13} V.$$

Um die mittlere relative Molekulargeschwindigkeit V zu berechnen, ist zu beachten, daß während $\frac{4}{5}$ seiner Existenz der negative Träger mit einem Flammenmolekül mit $m_2 = 18$ belastet ist und der positive mit 16 Flammenmolekülen, dann wird die Masse für die Relativgeschwindigkeit $\mu \sim 17$ und $V = V_H \sqrt{\frac{2000}{273} \frac{1}{17}}$, wo $V_H = 1,8 \cdot 10^5$ die Molekulargeschwindigkeit für Wasserstoff ist, und $\mu_H = 1$ ist. Dies ergibt $V = 1,182 \cdot 10^5$; demnach als theoretische Rekombinationszahl $\alpha' = 1,8 \cdot 10^{-8}$.

Die Zahl der wirklichen Rekombinationen zu der der theoretisch geschätzten ist demnach

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{4,28 \cdot 10^{-11}}{1,8 \cdot 10^{-8}} = 2,38 \cdot 10^{-3}.$$

Oben fanden wir für den Nutzeffekt der Ionenbefreiung durch den Stoß die Zahl $2,6 \cdot 10^{-3}$. Hier ergibt sich fast die gleiche Zahl, nämlich $2,4 \cdot 10^{-3}$. Also $2,4 \cdot 10^{-3}$ mal weniger, als bei Gleichberechtigung aller Stoßrichtungen zu erwarten wäre.

Es folgt daraus also, daß sowohl für die Wiedervereinigung wie für die Freimachung der Träger in der Flamme die Stoßrichtungen nicht gleichberechtigt sind, sondern daß für Stöße, welche die Ionisationsenergie besitzen, ein sehr kleiner Stoßwinkelbereich existiert, innerhalb dessen der Zusammenstoß zur wirklichen Trennung bzw. zur Wiedervereinigung führt. Für die Wiedervereinigung selbst ist diese Übereinstimmung mit dem Falle des Stoßes ungeladener Molekeln m. E. zufällig, und das Resultat von größeren Schwierigkeiten für das Verständnis, da ja hier eine Richtung der Stöße durch die Ladungen zu erwarten ist, welche den Nutzeffekt steigern sollte. Bevor wir hierauf eingehen, ist auf folgendes hinzuweisen:

Frl. Sponers¹⁾ Resultate über den Nutzeffekt der anregenden Stöße der Elektronen im Quecksilberdampf bei Zimmer-

1) H. Sponer, Ztschr. f. Phys. 7. S. 185. 1921.

temperatur sind allerdings auch von dieser Größenordnung, sie findet nämlich den Nutzeffekt zu $4 \cdot 10^{-3}$. Bei diesen Berechnungen wurde die Diffusion für die Stoßzahl ebenso wie hier vernachlässigt. Nach G. Hertz¹⁾ würde bei Berücksichtigung der Diffusion die Stoßzahl etwa 10mal geringer. Der Nutzeffekt also 10mal größer werden. Es ist aber bei diesem Resultat zu beachten, daß es erhalten ist für die Stoßzahl von freien Elektronen, während bei den Flammengasen die Elektronen nur während sehr geringer Zeit frei, während der größeren Zeit aber an Flammenmolekülen angelagert sind. Der Nutzeffekt, der sich demnach hier in der Flamme für den Stoß ungeladener Moleküle ergibt, ist bei Berücksichtigung des Umstandes, daß er durch den Stoß von Molekülen erfolgt, sicher nicht in Widerspruch mit den Messungen von Frl. Sponer. Andererseits ist wahrscheinlich der geringe Nutzeffekt der Rekombinationen gegenüber dem, was nach der J. J. Thomsonschen Theorie zu erwarten ist, folgendermaßen zu erklären: Bei einem Zusammenprall größerer Molekülmassen, deren momentane kinetische Energie in der Thomsonschen Theorie entgegengesetzt gleich dem Anziehungspotential gesetzt wird, steigert sich die entstehende Wärme derart, daß eine beträchtlich höhere kinetische Energie für den Moment des Zusammenpralls angenommen werden muß, als die der mittleren Temperatur. Bei Berechnung nach der Thomsonschen Theorie wurde die mittlere Temperatur von 2000°C zugrunde gelegt. Würde die effektive Temperatur beim Zusammenprall verdoppelt, so würde die Rekombination sich *et. par.* nur zum vierten Teil ergeben. Aber die erhöhte Temperatur muß gleichzeitig eine etwa 7,3fach gesteigerte Elektronen-Emissivität des Na-Atoms bewirken, so daß die Bildung eines neutralen Atoms beim Zusammentreffen entgegengesetzt geladener Träger nicht zustande kommt. Bei dieser Temperatur ist ja bereits nach der Sahaschen Theorie der Dissoziationsgrad der Funkenpektren erreicht.

V.

30. Die Sättigungsspannung der Stromspannungskurve

Die Charakteristik der Flammengase ist ausgezeichnet durch einen bei niedrigen Spannungen einsetzenden Sättigungs-

1) G. Hertz, *Ztschr. f. Phys.* 32. S. 305. 1925.

ansatz, an welchen sich, nicht wie in Gasen bei niedrigen Temperaturen, Stromwerte schließen, die unabhängig von der angelegten EMK sind, also nicht konstante Ströme bei steigender EMK, sondern linear ansteigende Stromwerte, die überhaupt keiner Sättigung zustreben.

Eine Erklärung für den Verlauf dieser Charakteristik existiert nicht, denn die Smithell-Wilson-Dawson'sche Formel (I, 760), welche sie mit drei Konstanten darzustellen imstande ist, ist eine empirische Darstellungsformel, die entstanden ist aus der Kombination der Sättigungscharakteristik normaler, unselbständiger Strömung mit einem jenseits des Sättigungsstroms einsetzenden linearen Anstieg. Es war bisher vollkommen unaufgeklärt, warum der Sättigungsansatz zwischen 2 und 5 Volt liegt, bei Zerstäubung von NaCl von verschiedener Konzentration.

Wenn man nun für die freien, negativen Träger einen fortgesetzten Massenwechsel zwischen Elektronenzustand und angelagertem Zustande annimmt, so folgt daraus, daß für den mittleren Trägerzustand eine völlig andere Sättigungsspannung existiert, als für die Teilzustände existieren würde, denn für jeden Trägerzustand wird Sättigungsspannung erreicht, wenn die mittlere Zeit zwischen der Rekombination zweier Träger sehr groß, sagen wir 100mal so groß ist wie die Zeit, während der sich der schnellere Träger zwischen den Elektroden befindet. Die mittlere Zeit zwischen 2 Rekombinationen ist für die Konzentration von $6,28 \cdot 10^{13}$ Na-Chloridmolekülen gleich 0,88 Sek. für Träger mittleren Zustandes.

Für den freien Elektronenzustand würde Sättigungsspannung erreicht, wenn die Dauer des freien Zustandes groß, sagen wir 100mal so groß ist wie die Zeit, während welcher das Elektron sich zwischen den Platten bewegt. Die mittlere Dauer des freien Zustandes beträgt aber für Elektronen $5,8 \cdot 10^{-7}$ Sek., ist also etwa 700000mal kürzer als im mittleren Zustand.

Quantitativ läßt sich folgendermaßen rechnen: Die Zeit für die Bewegung im Felde ist, wenn x der Weg, X die Feldstärke, l der Elektrodenabstand ist.

$$\int dt = \frac{1}{\beta K_2} \int \frac{dx}{X}.$$

Diese Zeit t soll $\frac{1}{99}$ der Zeit zwischen 2 Rekombinationen sein, also wird

$$\int_0^1 \frac{dx}{X} = \frac{1}{N^+ \alpha} \frac{\beta K_2}{99} \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{Volt}} \right].$$

Das Integral auf der linken Seite der Gleichung ist durch die Aufnahme der Potentialgradientenkurve erhältlich. Man trägt $\frac{1}{X}$ als Ordinaten zu den x auf und ermittelt den Flächeninhalt zwischen Kurve und Abszisse. Für den Abstand von 2,25 cm hat Wilckens bei Zerstäubung von Na-Chlorid gefunden, daß

$$\int_0^1 \frac{dx}{X} = \frac{32,45}{n(\text{Volt})}$$

ist, wo n die angelegte Klemmenspannung in Volt bezeichnet. Dieser Wilckenssche Wert unterliegt nicht den Einwänden, welche gegen die Geschwindigkeitsmessung in *I. 6. p. 745ff.* erhoben worden sind, denn die Gesamtzeit des Aufenthalts in der Flamme wird durch das Integral erhalten, wenn der Gesamtspannungsabfall durchlaufen wird und wie hier experimentell größere Klemmenspannungen verwendet wurden, bei welchen das Gefälle in der Mitte nicht auf nahezu 0 versiegt. Die rechte Seite der Gleichung ergibt bei Einsetzung der Zahlenwerte $\beta K_2 = 1000$ und $\frac{1}{N^+ \alpha} = 0,88$ den Wert 8,8. Es ergibt sich hiernach die Klemmenspannung, welche Sättigungsspannung bei 2,25 cm Abstand bei Zerstäubung von Na-Cl ergeben würde, zu

$$\frac{32,45}{8,8} \text{ Volt} = 3,67 \text{ Volt}.$$

Die Spannung von 3,67 Volt würde also bei einem Elektrodenabstand von 2,25 cm Sättigungsstrom bis auf 1 Proz. dadurch ergeben, daß das Feld die negativen Träger an die Anode treibt, bevor sie sich rekombinieren. Die Kurven bei Smithels, Wilson und Dawson bzw. die dort für die berechnete Sättigungsstromstärke I sich ergebenden Spannungen zeigen in der Tat zwischen 3 und 4 Volt diesen Sättigungsansatz für ein Gasvolumen und die Zerstäubung, welche den hier angenommenen etwa entspricht.

Wir kommen jetzt zum linearen Stromanstieg: Ist der Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{dx}{X}$ für alle Klemmenspannungen gleich

32,45 / n Volt, so hängt die Sättigungsspannung n , wie ersichtlich, von der Verschiebung βK_2 ab. Die Verschiebung ist aber für freie Elektronen, die sich nicht anlagern, $K^0 = 4,7 \cdot 10^4$. Die Zeit zwischen zwei Anlagerungen ist aus Tab. 6 zu berechnen. Wenn die Elektronen nun, bevor 99 Proz. ihrer Gesamtzahl sich anlagern, vom Strome herausgezogen werden sollen, so wird, wenn ϑ_x die Zeit bedeutet, innerhalb deren sich die Elektronenzahl, die frei wird, um 1 Proz verringert,

$$\frac{\partial N^{\odot}}{\partial t} = -A_1' N^{\odot}$$

$$e^{-A_1' \vartheta_x} = \frac{99}{100} \quad \text{oder} \quad \vartheta_x = 5,86 \cdot 10^{-9}.$$

Demnach wird

$$\int \frac{dx}{X} = 2,76 \cdot 10^{-4}$$

und

$$n = 1,17 \cdot 10^5 \text{ Volt.}$$

Um demnach die Elektronen vor der Anlagerung herauszuziehen, müßten etwa 10^5 Volt Spannung an die Elektroden gelegt werden.

Nun ist der Dissoziationsgrad für die Voraussetzung berechnet, daß der Strom so gering ist, daß durch ihn das Gleichgewicht nicht gestört wird. Mit zunehmender Spannung ist dies weniger und weniger erfüllt; während durch die geringe Spannung, die zur Vermeidung der Rekombinationen für die Träger mittleren (angelagerten) Zustandes nötig ist, das Dissoziationsgleichgewicht kaum gestört werden wird, wird bei höheren Spannungen, bis zu denen, die zur völligen Herausziehung der Elektronen in statu nascendi erforderlich sind, das Dissoziationsgleichgewicht geändert. Es wird sich dadurch wieder herzustellen streben, daß proportional der durch den Strom herausgezogenen freien Elektronen neue Elektronen der noch nicht dissoziierten Alkaliatome sich abspalten. Dann wird der Strom linear mit zunehmender Spannung ansteigen. Eine wirkliche Sättigung durch 10^5 Volt würde natürlich in

keinem Falle erreichbar sein, da lange vor ihrer Erreichung eine Vermehrung der Träger durch Elektronenstoß stattfinden würde, so daß der errechneten Grenzspannung von 10^5 Volt keine tatsächliche Bedeutung zukommen kann.

Daß der Grenzstrom selbst (nicht die Grenzspannung) der Flammengeschwindigkeit bei horizontalen Elektroden direkt proportional wird, bei vertikalen dem Tangens der Geschwindigkeiten, ist leicht ersichtlich.

Wesentlich ist, daß der erste Sättigungsansatz quantitativ, der dann folgende lineare Stromanstieg qualitativ zum ersten Male aus dem Gleichgewichtsansatz erklärbar und berechenbar wurde.

31.

Zusammenfassend kann man sagen: die hier durchgeführte Theorie des Flammgleichgewichts hat zu der Errechnung der Sättigungsspannung der Flammenleitung aus den aus der Gleichgewichtsbedingung abgeleiteten Reaktionskonstanten der stationären Zustände geführt. Diese Sättigungsspannung und der Verlauf der Charakteristik sind im Einklang mit der Beobachtung. — Es sind hier im wesentlichen aus mittlerer beobachteter Flammentemperatur und Trägerverschiebung, sowie Verweilzeit und Trägerbildungsspannung des $2p$ -Zustandes, also aus drei Beobachtungsdaten, sämtliche Reaktionskonstanten einschließlich der Dissoziations- und Rekombinationskonstanten der stationären Zustände in der Flamme berechnet worden.

Eine Berechnungsmöglichkeit, die ähnlich weitgehend ist, existiert für die übrige Gasentladung nicht. Nur unter der Voraussetzung einer alle speziellen Effekte überwiegenden Temperaturdissoziation ist diese Berechnung möglich; diese Voraussetzung ist aber in der Gasentladung nicht erfüllt. — Es steht zwar in der Flammenleitung die Sicherheit der erhaltenen Zahlen wegen des nicht so gut fundierten Beobachtungsmaterials gegenüber der übrigen Gasentladung zurück, der theoretische Einblick aber ist tiefer.

Leipzig, Juni 1926, Abteilung für Radiophysik des Physikalischen Instituts.

(Eingegangen 24. Juni 1926.)

3. Beiträge zur Theorie des kontinuierlichen Anteils der Röntgenstrahlen; von Max Neunhöffer¹⁾

Inhaltsverzeichnis. Einleitung. — I. Teil. Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Anteils der Röntgenstrahlung über die Beobachtungsrichtungen. § 1. Das Strahlungsfeld der Hyperbelbahn. § 2. Mittelbildungen. § 3. Diskussion. — II. Teil. Die Polarisation des Bremspektrums. § 1. Allgemeine Voraussetzungen. § 2. Vorbereitung für die spektrale Zerlegung des Feldes. § 3. Fourierdarstellung der Hyperbelbewegung. § 4. Mittelbildung für die Intensitäten. § 5. Das Korrespondenzprinzip. § 6. Definition des Polarisationsgrades. § 7. Diskussion.

Einleitung

Nach übereinstimmenden Beobachtungen von Stark²⁾, Friedrich³⁾ und Löbe⁴⁾ liegt das Maximum der Strahlung einer Röntgenröhre nicht wie anfänglich vermutet wurde, in der Ebene senkrecht zum Kathodenstrahl, sondern zeigt ein deutliches, mit wachsender Röhrenspannung zunehmendes Voreilen, d. h. die Richtungen sind bevorzugt, die einen Winkel $< \frac{\pi}{2}$ mit der positiven Kathodenstrahlrichtung bilden. Es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Dissymmetrie von dem Anteil der Bremsstrahlung an der Gesamtstrahlung herrührt, denn sie wird um so ausgeprägter, je geringer das Atomgewicht des Antikathodenmaterials ist, d. h. je geringer der Anteil der Eigenstrahlung wird. Sommerfeld⁵⁾ konnte nun zeigen, daß dieses Voreilen sich unter der Annahme einer konstanten, geradlinigen Bremsung der Kathodenstrahlelektronen zwanglos aus der elektromagnetischen Theorie der Strahlung erklären läßt.

1) Münchener Dissertation.

2) J. Stark, Phys. Ztschr. 10. S. 902. 1909.

3) W. Friedrich, Diss. München 1911.

4) W. Löbe, Ann. d. Phys. 44. S. 1033. 1914.

5) A. Sommerfeld, Phys. Ztschr. 10. S. 969. 1909.

Nachdem wir aber die Atome der Antikathode als mechanische Systeme von Kernen und Elektronen betrachten gelernt haben, muß zweifellos auch der Verlauf des Bremsvorgangs diesen Anschauungen angepaßt werden. Man muß sich also die Bahnen der Kathodenstrahlelektronen in den Kernfeldern als Hyperbeln denken. Da damit und mit Hilfe des Korrespondenzprinzips die Energieverteilung über die Frequenzen den Beobachtungen¹⁾ gemäß wiedergegeben wird, ist es interessant zu untersuchen, ob sich auf diese Weise auch die Dissymmetrie der Gesamtstrahlung ergibt.

Eine andere Erscheinung, nämlich die teilweise Polarisation der Röntgenstrahlung, wie sie von Barkla²⁾, Bassler³⁾ u. a. beobachtet wird, ist zweifellos ebenfalls auf den Bremsvorgang der Elektronen zu schieben. Im 2. Teil der Arbeit soll daher versucht werden, mit denselben Annahmen (Hyperbelbahn der Elektronen, klassische Strahlungsformel) den Polarisationsgrad des kontinuierlichen Spektrums zu bestimmen. Um die Polarisation der einzelnen Frequenzen zu finden, werden wir gezwungen sein, vom Korrespondenzprinzip Gebrauch zu machen. Dessen Verallgemeinerung auf unperiodische Systeme ist aber von Kramers⁴⁾ und Wentzel⁵⁾ in grundsätzlich verschiedener Weise gegeben worden. Während der erstere bei den Frequenzen die kleiner sind als die der beobachteten Emissionsgrenze, die Gültigkeit des klassischen Spektrums fordert und die Intensität der größeren Frequenzen = 0 setzt, werden durch die Wentzelsche Formel die unendlich großen Frequenzen der klassischen Theorie bis an die beobachtete Grenze „zurückgeschoben“, in genauer Analogie zum Korrespondenzprinzip bei der Balmerserie. Leider sind die experimentellen Untersuchungen bis jetzt fast ausschließlich an spektral unzerlegter Strahlung ausgeführt, so daß ein quantitativer Vergleich mit der Erfahrung unmöglich ist. Ebenso ist es mit Hilfe des bisherigen Beobachtungsmaterials nicht möglich, eine

1) H. Kühlenkampff, Ann. d. Phys. 69. S. 548. 1922.

2) C. G. Barkla, Phil. Trans. A. 204. S. 467. 1905.

3) E. Bassler, Ann. d. Phys. 28. S. 808. 1909.

4) H. A. Kramers, Phil. Mag. 46. S. 836. 1923.

5) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. 27. S. 257. 1924.

Entscheidung über die beiden eben erwähnten Formulierungen des Korrespondenzprinzips zu treffen.

I. Teil

Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Anteils der Röntgenstrahlung über die Beobachtungsrichtungen

§ 1. Das Strahlungsfeld der Hyperbelbahn

Wir schreiben die Gleichung der Hyperbel in Polarkoordinaten mit der wahren Anomalie φ . Als gegebene Größen haben wir dabei die Anfangsgeschwindigkeit V des Elektrons und den senkrechten Abstand ϱ seiner Anfangsrichtung (der Asymptote) vom Kern zu betrachten.

Es gilt allgemein

$$(1) \quad \varrho^2 = a^2(\epsilon^2 - 1),$$

wobei

$$a = \frac{e^2 Z}{m \cdot V^2} = \text{große Halbachse.}$$

e = Elektronenladung, m = Elektronenmasse,

Z = Kernladungszahl, ϵ = numerische Exzentrizität

ist. Legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y so, daß sein Nullpunkt mit dem Brennpunkt und seine x -Achse

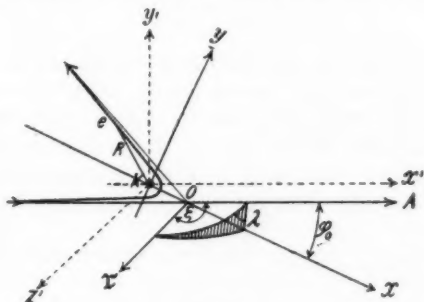


Fig. 1

mit der Hauptachse der Hyperbel zusammenfällt (vgl. Fig. 1), so gilt, wie man leicht einsieht, für den Winkel φ_0 zwischen positiver x -Achse und Asymptotenrichtung die Beziehung:

$$(2) \quad \cos \varphi_0 = \frac{1}{\epsilon}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\epsilon}.$$

Die Gleichung der Hyperbelbahn kann nunmehr folgendermaßen geschrieben werden:

$$(3) \quad R = \frac{\rho \sqrt{s^2 - 1}}{1 + s \cos \varphi} \quad (R = \text{Radiusvektor Kern-Elektron}),$$

wobei der Winkel φ vom Perihel aus gerechnet ist.

Der Beschleunigungsvektor \dot{v} ist stets parallel R und hat die Größe

$$(4) \quad \dot{v} = \frac{Z \cdot e^2}{m \cdot R^2} = \frac{Z \cdot e^2 (1 + s \cos \varphi)^2}{m \rho^2 (s^2 - 1)}.$$

Aus der Bedingung der konstanten Flächengeschwindigkeit:

$$(5) \quad R^2 \dot{\varphi} = \rho \sqrt{s^2 - 1},$$

leitet man mit Hilfe von (3) leicht folgende Gleichung für die Geschwindigkeit v des Elektrons ab:

$$(5a) \quad v^2 = \frac{V^2 (1 + 2s \cos \varphi + s^2)}{(s^2 - 1)}.$$

Um nun den Betrag der während des ganzen Bewegungsvorgangs ausgestrahlten Energie zu erhalten, machen wir Gebrauch von den Abrahamschen Formeln¹⁾ für das Feld einer beliebig bewegten Punktladung und bilden den Betrag des Strahlvektors in der Beobachtungsrichtung:

$$(6) \quad S = \frac{e}{4\pi} \mathfrak{E}^2.$$

Die Beobachtungsrichtung definieren wir als die Richtung Aufpunkt-Kern (Koordinatenanfangspunkt), d. h. wir nehmen die Entfernung des Aufpunktes als so groß an, daß die Emission praktisch in einem Punkt erfolgt. Dann können in Fig. 1 für das folgende die Punkte K und O als zusammenfallend angenommen werden. Für \mathfrak{E}^2 gilt die Gleichung

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}^2 &= \frac{e^2}{r^2 c^4 (1 - \beta \cos \chi)^5} \left[\dot{v}^2 (1 - \beta \cos \chi)^2 - (\dot{v} r_1)^2 (1 - \beta^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{c} (\dot{v} \dot{v}) (\dot{v} r_1) (1 - \beta \cos \chi) \right] \\ (r_1 &= \text{Einheitsvektor in der Strahlrichtung.}) \end{aligned} \right.$$

Dabei ist $\beta = \frac{v}{c} < 1$ und χ der Winkel $(v r)$ zur Zeit des Entsendens des Impulses.

1) M. Abraham, Lehrb. d. El. 2. Bd. 3. Aufl. 1914 § 14.

In diese letzte Gleichung haben wir nun die Werte für v und \dot{v} aus (4) und (5) einzusetzen und das zeitliche Integral über die ganze Bewegung zu bilden. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir β als so klein an, daß wir \mathfrak{E}^2 nach β in eine Reihe entwickeln können, die wir dann ohne merklichen Fehler nach dem in β linearen Glied abbrechen dürfen. Wir erhalten somit für unser Integral:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}^2 dt &= \frac{e^2}{r^2 c^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{v} r_1)^2 dt + \frac{1}{c} \int (\dot{v} r_1) d(v^2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \beta \cos \chi dt (3 [\dot{v} r_1]^2 - \dot{v}^2 + \frac{5}{c} (\dot{v} \dot{v})(\dot{v} r_1)) \right]. \end{aligned} \right.$$

$(\dot{v} r_1)$ läßt sich aber zerlegen in:

$$(9) \quad \dot{v}_x \cos(rx) + \dot{v}_y \cos(ry).$$

Ebenso ist:

$$(10) \quad \beta \cos \chi dt = \frac{1}{c} (dx \cos(rx) + dy \cos(ry)).$$

In den ersten beiden Gliedern der Gleichung (8) gehen wir von der Integration über t mit Hilfe von Gleichung (5) zur Integration über φ über, und außerdem bilden wir aus den Gleichungen (5a) und (3):

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} d(v^2) &= -\frac{2V^2 s}{(s^2 - 1)} \sin \varphi d\varphi, \\ dx &= \frac{e \sqrt{s^2 - 1} \sin \varphi d\varphi}{(1 + s \cos \varphi)^2}, \quad dy = \frac{e \sqrt{s^2 - 1} (\cos \varphi + s) d\varphi}{(1 + s \cos \varphi)^2}. \end{aligned} \right.$$

Damit werden alle Integrale der Gleichung (8) leicht auswertbar. Aus den Arbeiten von Kramers und Wentzel geht aber hervor (was sich auch noch aus unseren eigenen Entwicklungen ergeben wird), daß überhaupt nur Bahnen kleinster Exzentrizität zur Aussendung der Röntgenstrahlen beitragen (der übrige Teil der Energie wird zur Erwärmung der Antikathode verbraucht). Deshalb setzen wir $s = 1 + \delta$ und berücksichtigen im folgenden nur die niedrigsten Potenzen von δ . Damit gehen die Gleichungen (2) über in:

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{2\delta}, \quad \cos \varphi_0 = 1$$

und wir erhalten für die einzelnen Faktoren der Gleichung (8) Formeln von folgendem Typus:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}^2 dt &= \frac{\kappa^4 e^3}{m^4 q^5 V^5} \int_{\varphi_0 - \pi}^{\pi - \varphi_0} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2 d\varphi = C \cdot 3\pi (2\delta)^{-5/2}, \\
\left[\frac{Z^4 e^3}{m^4 q^5 V^5} = \frac{m V^5}{Z e^2 (\varepsilon^2 - 1)^{5/2}} = C (\varepsilon^2 - 1)^{-5/2} \right], \\
\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_x^2 dt &= C (\varepsilon^2 - 1)^{-5/2} \int_{\varphi_0 - \pi}^{\pi - \varphi_0} \cos^2 \varphi (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2 d\varphi = C \frac{7}{4} \pi (2\delta)^{-5/2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_y^2 dt &= C (\varepsilon^2 - 1)^{-5/2} \int_{\varphi_0 - \pi}^{\pi - \varphi_0} \sin^2 \varphi (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2 d\varphi = C \frac{5}{4} \pi (2\delta)^{-5/2}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_x \dot{v}_y dt &= C (\varepsilon^2 - 1)^{-5/2} \int_{\varphi_0 - \pi}^{\pi - \varphi_0} \cos \varphi (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2 \sin \varphi d\varphi = 0
\end{aligned}$$

usw. Setzen wir nunmehr die so erhaltenen Werte in unsere Gleichung (8) ein, so erhalten wir die Gesamtausstrahlung der Hyperbelbahn, in der durch die Winkel ($r x$) und ($r y$) definierten Richtung, in Abhängigkeit von der Exzentrizität der Bahn und der Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons. Es wird also:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} I(\delta) &= \frac{c}{4\pi} \int \mathfrak{E}^2 dt = \frac{e^3}{4\pi c^3 r^3} C \pi (2\delta)^{-5/2} \\ &\left\{ \left[3 - \frac{7}{4} \cos^2(r x) - \frac{5}{4} \cos^2(r y) \right] + 2 \frac{V}{c} (2\delta)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{45}{4} \cos(r y) - \frac{21}{4} \cos^3(r y) - \frac{51}{4} \cos^2(r x) \cos(r y) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

§ 2. Mittelbildungen

Bei der praktischen Beobachtung von Röntgenstrahlintensitäten wird man es natürlich stets mit einer sehr großen Anzahl emittierender Elektronen zu tun haben, deren Bahnebenen durch den Kathodenstrahl gehen und im übrigen gleichmäßig über alle Richtungen verteilt sein werden. Wir können daher an Stelle der zwei Winkel ($r x$) und ($r y$) den Winkel ζ zwischen Asymptote (Kathodenstrahl) und Beobachtungsrichtung einführen und die Mittelung über alle Bahnebenen so ausführen, daß wir r bei konstantem $\varphi_0(\varepsilon)$ und ζ auf einem Kegel um die Asymptote A rotieren lassen. Zur Durchführung der Mittelung führen wir noch den Winkel λ (vgl. Fig. 1) zwischen der Bahnebene und der Ebene durch den Kathodenstrahl und

die Beobachtungsrichtung ein. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Winkel zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, ist unter der Annahme gleichmäßiger Verteilung der Bahnebenen über alle Richtungen einfach gegeben durch $d\lambda/2\pi$. Wir haben also zu bilden:

$$(13) \quad \bar{I}(\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(\delta) d\lambda.$$

Aus der Betrachtung des sphärischen Dreiecks r, x, A (vgl. die Fig. 1) erhält man mit Hilfe des Cosinussatzes:

$$(14) \quad \begin{cases} \cos(r x) = \cos \varphi_0 \cos \zeta + \sin \varphi_0 \sin \zeta \cos \lambda \\ \cos(r y) = \sin \varphi_0 \cos \zeta - \cos \varphi_0 \sin \zeta \cos \lambda \end{cases}$$

und indem man dies in (13) unter Beachtung der oben gemachten Beschränkung auf kleine Werte von ε einführt:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(r y) d\lambda = \sqrt{2\delta} \cos \zeta, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(r x) d\lambda = \cos^2 \zeta, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(r y) d\lambda = \frac{1}{2} [1 - \cos^2 \zeta], \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3(r y) d\lambda = \frac{\sqrt{2\delta}}{2} [3 \cos \zeta - 3 \cos^3 \zeta], \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(r x) \cos(r y) d\lambda = \frac{\sqrt{2\delta}}{2} [4 \cos^3 \zeta - 2 \cos \zeta]. \end{cases}$$

Die so erhaltenen Mittelwerte setzen wir nunmehr in (12) ein und ordnen nach Potenzen von $\cos \zeta$. Wir erhalten damit eine Formel für die unter einem bestimmten Neigungswinkel ζ gegen die Kathodenstrahlrichtung von allen Bahnen der Exzentrizität $1 + \delta$ ausgesandte Energie. Es ergibt sich:

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{I}(\delta) = \frac{m V^5}{32 e^3 Z r^3 (2\delta)^{1/2}} \\ \quad \left(19 - 9 \cos^2 + 2 \frac{V}{e} (129 \cos \zeta - 141 \cos^3 \zeta) \right). \end{cases}$$

Um wenigstens größenordnungsmäßig auch über den Gesamtbetrag der emittierten Energie Aufschluß zu erhalten, hätten wir noch die Abhängigkeit von der Exzentrizität durch eine Mittelung über alle Abstände ϱ der Bahnasymptote vom Kern zu eliminieren. Dringt ein Elektron in den Atomquerschnitt Q ein, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser Abstand zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegt, gegeben durch:

$$(17) \quad \frac{2\pi \varrho d\varrho}{Q} = \frac{2\pi a^2}{Q} \varepsilon d\varepsilon = \frac{2\pi a^2}{Q} d\delta.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt sich ohne weiteres aus Gleichung (1) und aus unserer Beschränkung auf kleine Werte von ε . Der gesuchte Mittelwert wird also:

$$(18) \quad I' = \frac{2\pi a^2}{Q} \int_0^{\infty} \bar{I}(\delta) d\delta.$$

Aus dem Faktor $\delta^{-1/2}$ der Gleichung (16) folgt aber sofort, daß dieses Integral für die untere Grenze unendlich wird. Diese Divergenz rührt daher, daß bei kleinsten Exzentrizitäten nach der klassischen Rechnung mehr Energie ausgestrahlt wird als durch das $\frac{m}{2} V^2$ der Elektronen gegeben ist.¹⁾ Bekanntlich hat man diesen Umstand mit dem von Ramsauer²⁾ entdeckten Effekt in Zusammenhang gebracht.³⁾ Ohne zu dieser Frage hier Stellung zu nehmen, werden wir dem Ramsauereffekt dadurch Rechnung tragen, daß wir als untere Integrationsgrenze denjenigen Wert von δ einsetzen, für den die Gesamtausstrahlung nach allen Richtungen

$$(19) \quad \int \bar{I}(\delta) df = \frac{m}{2} V^2$$

wird. Die untere Grenze wird also bestimmt durch die Gleichung:

$$(20) \quad 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \bar{I}(\delta) \sin \zeta d\zeta = \frac{m}{2} V^2 = \frac{\pi m V^5}{16 Z c^3} (19 - \frac{1}{2} 9)(2\delta)^{-1/2}$$

1) Das gilt nicht nur unter der Annahme, daß die Hyperbel voll durchlaufen wird (vgl. S. 493), sondern auch wenn man unter Berücksichtigung der Rückwirkung des Strahlungsfeldes mit Spiralbahnen rechnen würde, die eventuell in den Kern hineinlaufen.

2) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 64. S. 513 und 66. S. 546. 1921.

3) F. Hund, Ztschr. f. Phys. 13. S. 241. 1923.

und daraus folgt:

$$(21) \quad \delta_{\min} = \left(\frac{\pi}{Z}\right)^{1/2} \left(\frac{V}{c\sqrt{2}}\right)^{1/2}.$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (18) und (16):

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} I' = \text{Const} \frac{Z^{1/2}}{Q r^2 V^{1/2}} \\ \left(19 - 9 \cos^2 \zeta + 2 \frac{V}{c} (129 \cos \zeta - 141 \cos^3 \zeta)\right). \end{array} \right.$$

Gleichung (22) gibt uns größenordnungsmäßig den Betrag der emittierten Intensität und seine Verteilung über die Beobachtungsrichtungen.

§ 3. Diskussion

Als Abhängigkeit von Spannung und Antikathodenmaterial ergibt sich aus dem Faktor

$$\frac{Z^{1/2}}{Q V^{1/2}}$$

ein Anstieg mit wachsendem Z und wachsender Spannung, da wir jedenfalls für Q eine ähnliche Spannungsabhängigkeit annehmen müssen, wie sie Lénard bei dem von ihm eingeführten sog. absorbierenden Querschnitt angibt.

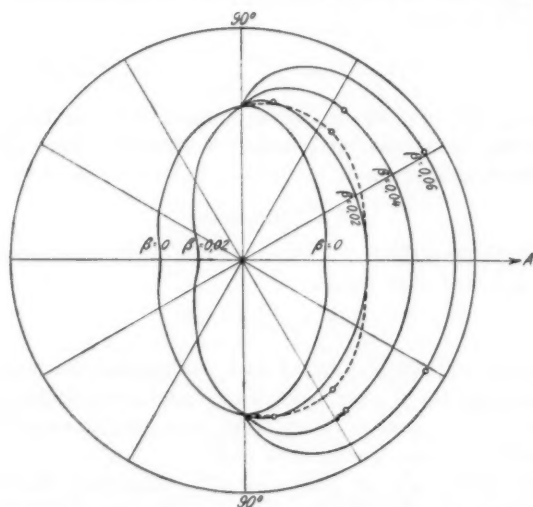
Um weiter die in Gleichung (22) enthaltene Richtungsabhängigkeit zu untersuchen, die von der Art der Mittelung über δ unabhängig ist, konstruieren wir ein Polardiagramm, wie es den Figuren entspricht, die Stark (a. a. O.) zur Darstellung seiner Versuchsergebnisse gebraucht hat (vgl. Fig. 2). Tragen wir zuerst für $\beta = 0$ die berechneten Intensitäten als Radien in den verschiedenen Ausstrahlungsrichtungen auf, so erkennen wir unmittelbar das bei $\zeta = \frac{\pi}{2}$ liegende Maximum.

Bei $\zeta = 0$ liegt ein Minimum, das aber jedenfalls nicht 0 ist. Bei steigenden Werten von β haben wir jetzt zu beachten, daß $\cos \zeta$ mit β gegen 0 geht, daß wir also setzen können:

$$\cos \zeta = a\beta + b\beta^2 + \dots$$

Gehen wir damit in (22) ein, so sehen wir, daß im letzten Glied nur höhere Potenzen von β als die erste auftreten. Wir dürfen also dieses Glied im weiteren nicht berücksichtigen. Für $\beta = 0,02$ wird die Figur bereits merklich unsymmetrisch und das Maximum wandert um einen kleinen Betrag nach

rechts. Für $\beta = 0,04$ wird die Asymmetrie verstärkt unter gleichzeitiger Verwischung des Maximums. Bereits bei $\beta = 0,06$ ist die Konvergenz unserer Reihenentwicklung zu schlecht, um noch verwertbare Resultate zu liefern, was daraus folgt, daß



Intensitätsverteilung über die Ausstrahlungsrichtungen. Ausgezogene Kurven: Theoretische Werte ($\beta = 0; 0,02; 0,04; 0,06$). Punktierte Kurve: exp. Resultat von Loebe bei 10fach größerem β . (49000 Volt, $\beta = 0,41$)

Fig. 2

für $\zeta = \pi$ die Intensitäten negativ ausfallen würden. Zur genauen Festlegung der Maxima unserer Kurven bilden wir noch

$$(23) \quad \frac{dJ'}{d\zeta} = 18 \cos \zeta \sin \zeta - 2\beta \cdot 129 \sin \zeta,$$

woraus sich ergibt:

$$\cos \zeta_{\text{extr}} = 14,3 \beta.$$

Die dieser Gleichung entsprechenden Punkte sind in unseren Kurven besonders vermerkt. Für $\beta > 0,07$ würde also das Maximum bei $\zeta = 0$ bleiben. Andererseits entspricht eine solche Kathodenstrahlgeschwindigkeit erst einer Spannung von 1150 Volt, was weit unterhalb der gebräuchlichen liegt. Die Messungen von Loebe, bei welchen die Versuchsbedingungen

am genauesten definiert sind, ergeben bei einer Spannung von 49000 Volt ($\beta = 0,41$) für die Lage des Maximums einen Winkel von 55° gegen die Kathodenstrahlrichtung. Eine seiner Kurven haben wir punktiert in unsere Figur zum Vergleich eingetragen.

Es ist also festzustellen, daß es auf Grund unserer Voraussetzungen nicht möglich ist, der Erfahrung gerecht zu werden, und wir müssen daher nach den Gründen hierfür fragen. Ein Gesichtspunkt, der vielleicht den Schlüssel zur Erklärung des Versagens unserer Theorie liefern kann, ist der, daß wir ja stets die Hyperbelbahn in ihrer ganzen Ausdehnung, also auch den Ast, auf dem das Elektron das Atom verläßt, in unsere Rechnungen eingesetzt haben. In Wirklichkeit wird aber der letztere Ast nicht immer durchlaufen werden, da ja das Elektron gerade auf den Bahnen, die einen großen Beitrag zur Ausstrahlung liefern (kleine s) eine starke Rückwirkung durch die Strahlung — eine „Strahlungsdämpfung“ — erfährt, so daß diese Bahnen keine Hyperbeln, sondern klassisch etwa Spiralbahnen, quantentheoretisch abgebrochene Hyperbeln sein würden. Andererseits bewirkt, wie man sich an Fig. 1 leicht überzeugt, die Einbeziehung des zweiten Astes der Hyperbel im allgemeinen eine Ausstrahlung in der Richtung, in der wir das Minimum erwarten, nämlich in der Kathodenstrahlrichtung. Dadurch erscheint das Maximum verwischt und zu weit nach vorne verschoben. Es dürfte aber kaum möglich sein, diesem Umstand ohne größere Willkür Rechnung zu tragen. Man kann also wohl zusammenfassend sagen: Der Versuch mit Hilfe der Hyperbelbahn der Elektronen und der klassischen Strahlungsformel die Intensitätsverteilung der Röntgenstrahlen zu berechnen, mußte an der Unmöglichkeit scheitern, den Einfluß der „Strahlungsdämpfung“ physikalisch und mathematisch exakt zu formulieren. Dieses Ergebnis muß andererseits aufs Höchste überraschen und zur Vorsicht mahnen bei der Untersuchung der feineren Struktur derartiger Strahlungsvorgänge. Für die Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung bietet zwar die klassische Theorie die formale Möglichkeit, doch lehrt uns gerade der oben erwähnte Ramsauereffekt, daß damit die Quantenwirklichkeit nicht genügend approximiert wird.

Wenn man versucht, die Entwicklung der Gleichung (7) noch zu höheren Potenzen von β fortzusetzen, so sieht man leicht, daß das mit β^2 multiplizierte Glied additive Beiträge zu den beiden ersten Gliedern in Gleichung (16) liefert, während andererseits mit β^3 multiplizierte Glieder zum dritten und vierten Glied hinzukommen. Erst eine bis zu diesem Punkt fortgesetzte Rechnung würde also eine konsequente Weiterentwicklung bedeuten, wie man sich durch eine Übertragung der entsprechenden obigen Betrachtung leicht überzeugt. Außer einer wesentlichen Vergrößerung der Unübersichtlichkeit des mathematischen Apparates erhebt sich dabei noch das Bedenken, ob es dann noch zulässig ist, die Hyperbelbahn unrelativistisch zu behandeln, wie wir es getan haben.

II. Teil

Die Polarisation des Bremsspektrums

§ 1. Allgemeine Voraussetzungen

Eine Polarisation des Bremsspektrums wird nur dann zu erwarten sein, wenn während des Bremsvorgangs in der Antikathode eine bestimmte Vorzugsrichtung durch die Richtung des Kathodenstrahls gegeben ist. Dies ist aber nur der Fall, wenn die Elektronen eines homogenen, parallelen Kathodenstrahlbündels in der Antikathode zur Emission kommen, ohne vorher merklich diffus zu werden. Um dies zu erreichen, muß man die Antikathode so dünn wie möglich machen, damit jedes Elektron praktisch nur einmal zur Emission kommt, und zwar ehe es durch strahlungslose Streuung seine Anfangsrichtung geändert hat. Dann ist die Kathodenstrahlrichtung gemeinsame Bahnasymptote aller Elektronen, und die gegenseitige Lage der Koordinatenachsen xy und der Asymptote wird durch die frühere Fig. 1 charakterisiert.

Wir haben nun bei der Berechnung der spektralen Verteilung der Energie darauf zu achten, wieviel jede Komponente der Beschleunigung \ddot{v} im einzelnen zur Ausstrahlung beiträgt. Insbesondere wird uns interessieren, welchen Bruchteil der Gesamtenergie die Komponente von \ddot{v} in der gemeinsamen Anfangsrichtung der Elektronen liefert, und wie diese Energie spektral zusammengesetzt ist. Durch Vergleich dieses Energiebetrags mit der Gesamtenergie wird es dann möglich sein,

die Polarisierung zu berechnen. Würde sich z. B. ergeben, daß bei einer bestimmten Frequenz die Beschleunigungskomponente in der Kathodenstrahlrichtung ein Drittel der Gesamtenergie dieser Frequenz liefert, so hätte man von verschwindender Polarisierung zu sprechen, denn die übrigen zwei Drittel könnte man sich ausgesandt denken von zwei aufeinander und auf dem Kathodenstrahl senkrechten Beschleunigungsrichtungen, die unter sich infolge der Rotationssymmetrie um den Kathodenstrahl völlig gleichberechtigt sind. Dies heißt aber mit anderen Worten: Wir haben keine Vorzugsrichtung für den elektrischen Vektor und können daher keine Polarisierung beobachten. Ist der Beitrag der einen Komponente größer oder kleiner als ein Drittel, so wird die Beobachtung eine Polarisierung parallel, bzw. senkrecht zum Kathodenstrahl angeben.

§ 2. Vorbereitung für die spektrale Zerlegung des Feldes¹⁾

Für unsere jetzigen Absichten wollen wir von den Formeln für die Ausstrahlung der Punktladung nur unter Annahme kleinster Kathodenstrahlgeschwindigkeiten Gebrauch machen, d. h. wir vernachlässigen auch die in v/c linearen Glieder und können dann für die elektrische, bzw. magnetische Feldkomponente schreiben²⁾:

$$(24) \quad \mathcal{E} = \frac{e}{c^2 r} [\ddot{r}_1 [\ddot{r}_1 \dot{v}]] \quad \mathcal{H} = - \frac{e}{c^2 r} [\ddot{r}_1 \dot{v}]$$

(\ddot{r}_1 = Einheitsvektor in der Strahlrichtung).

Zum Zweck der spektralen Zerlegung des Feldes in die Frequenzen ν stellen wir \dot{v} als Funktion der Zeit durch das folgende Fourierintegral dar:

$$(25) \quad \dot{v} = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \dot{v}_\nu e^{2\pi i \nu t}$$

und ebenso

$$(26) \quad \mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_\nu d\nu e^{2\pi i \nu t} \quad \mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_\nu d\nu e^{2\pi i \nu t},$$

1) In den beiden folgenden §§ folgen wir der Darstellung von G. Wentzel (a. a. O.).

2) M. Abraham (a. a. O.) 2. Kap. § 9.

wobei zu setzen ist:

$$(27) \quad \mathfrak{E}_\nu = \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{r}_1 [\mathbf{r}_1 \dot{\mathbf{v}}_\nu]] \quad \mathfrak{H}_\nu = - \frac{e}{c^2 r} [\mathbf{r}_1 \ddot{\mathbf{v}}_\nu].$$

Daraus bilden wir den Poyntingschen Vektor \mathfrak{S} und bestimmen sein zeitliches Integral über den ganzen Bewegungsvorgang. Wir erhalten dann die gesamte ausgestrahlte Energie in spektraler Zerlegung und zwar gemäß unserer rein klassischen Rechnungsweise verteilt über einen Frequenzbereich von 0 bis ∞ . Dies entspricht bekanntlich keineswegs der Erfahrung, die vielmehr eine scharfe kurzwellige Grenze bei $\nu_0 = \frac{eV}{h}$ angibt und damit das Vorhandensein von Quantenprozessen andeutet. Trotzdem werden wir auch weiterhin die Rechnung mit den bisherigen Annahmen durchführen und erst am Schluß zeigen, wie durch die von Kramers¹⁾ und Wentzel²⁾ angegebenen Verallgemeinerungen des Korrespondenzprinzips auf unperiodische Systeme auch die Frequenzbeziehungen richtig gestellt werden.

Wir berechnen also jetzt die Gesamtstrahlung und haben dafür zu setzen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S} dt &= \frac{e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \\ &= \frac{e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' [\mathfrak{E}_\nu \mathfrak{H}_{\nu'}] e^{2\pi i(\nu + \nu')t}. \end{aligned}$$

Da nach dem Fouriertheorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \mathfrak{H}_{\nu'} e^{2\pi i(\nu + \nu')t} = \mathfrak{H}_{-\nu},$$

so kann man auch einfacher schreiben:

$$(28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S} dt = \frac{e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu [\mathfrak{E}_\nu \mathfrak{H}_{-\nu}] = \frac{e}{4\pi} \cdot 2 \int_0^{\infty} [\mathfrak{E}_\nu \mathfrak{H}_{-\nu}] d\nu$$

und mit Hilfe von Gleichung (27), wie schon in der zitierten Arbeit von Wentzel angegeben:

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S} dt = \int_0^{\infty} J_\nu d\nu,$$

1) H. A. Kramers, a. a. O.

2) G. Wentzel, a. a. O.

wobei gesetzt ist:

$$J_{\nu} = \frac{e^2}{2\pi c^3 r^2} ([r_1 \dot{v}_{\nu}] [r_1 \dot{v}_{-\nu}])$$

$\dot{v}_{-\nu}$ und $\ddot{\Phi}_{-\nu}$ bedeuten die konjugiert komplexen Werte zu \dot{v}_{ν} und $\ddot{\Phi}_{\nu}$. Um aus Gleichung (29) das emittierte Spektrum zu berechnen, bilden wir die Umkehrung des Integrals (25):

$$(30) \quad \dot{v}_{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{v} e^{-2\pi i \nu t}$$

und zerlegen \dot{v}_{ν} in seine Komponenten nach den Koordinatenachsen x und y (vgl. Fig. 1).

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{v}_{\nu x} = \xi_{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d^2 x}{dt^2} e^{-2\pi i \nu t} \\ \dot{v}_{\nu y} = i \eta_{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d^2 y}{dt^2} e^{-2\pi i \nu t} \end{cases}$$

Die in (31) eingeführten Größen ξ_{ν}, η_{ν} sind reell, da die x -Komponente der Beschleunigung eine gerade, die y -Komponente eine ungerade Funktion von t und letztere daher imaginär ist. Führen wir die Vektoroperation in (29) aus, so ergibt sich (vgl. auch Wentzel a. a. O.):

$$(32) \quad J_{\nu} = \frac{e^2}{2\pi c^3 r^2} (\xi_{\nu}^2 \sin^2(rx) + \eta_{\nu}^2 \sin^2(ry)).$$

Dies ist nunmehr der Energiebetrag, der mit der Frequenz ν durch die Flächeneinheit einer Kugel vom Radius r um das Emissionszentrum hindurchtritt. Um zum Gesamtbetrag der emittierten Energie von der Frequenz ν zu gelangen, haben wir noch über die gesamte Kugeloberfläche zu integrieren. Dann ergibt sich:

$$(33) \quad J'_{\nu} = \int J_{\nu} df = \frac{4e^2}{3c^3} (\xi_{\nu}^2 + \eta_{\nu}^2).$$

§ 3. Fourierdarstellung der Hyperbelbewegung

Zur Bestimmung von ξ_{ν} und η_{ν} werden wir zweckmäßig von den Polarkoordinaten zu einer Parameterdarstellung der Hyperbel in den rechtwinkligen Koordinaten xy mit der exzentrischen Anomalie w als Parameter übergehen. Wir schreiben also für den raumzeitlichen Verlauf der Hyperbelbewegung:

$$(34) \quad x = a (\mathfrak{C} \wp w - \varepsilon) \quad y = a \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \mathfrak{S} \sin w$$

$$(35) \quad t = \frac{e^3 Z \sqrt{m}}{\sqrt{(2W)^3}} (\varepsilon \mathfrak{S} \sin w - w),$$

wobei

$$(34a) \quad a = \frac{e^3 Z}{m \cdot V^2} = \text{große Halbachse}$$

durch Gleichung (2) gegeben ist und W die Energie des Elektrons in seiner Bahn darstellt. Im Anschluß an Gleichung (35) bilden wir:

$$(36) \quad 2\pi \nu t = j(\varepsilon \mathfrak{S} \sin w - w),$$

wobei

$$(36a) \quad j = \frac{2\pi \sqrt{m} e^3 Z}{\sqrt{(2W)^3}} \nu$$

ist. Mit Hilfe der Gleichungen (34) und (36) können wir nunmehr die Beschleunigungskomponenten ξ_ν, η_ν in Gleichung (31) folgendermaßen schreiben (man beachte die Symmetrie der Hyperbel gegen die Hauptachsen, zufolge deren die auf die Integrationsgrenzen bezogenen Glieder bei der partiellen Integration wegfallen):

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_\nu = 2\pi i \nu \int dx e^{-2\pi i \nu t} \\ \quad = i j \sqrt{\frac{2W}{m}} \int dw \mathfrak{S} \sin w e^{-ij(\varepsilon \mathfrak{S} \sin w - w)} \\ \eta_\nu = 2\pi \nu \int dy e^{-2\pi i \nu t} \\ \quad = j \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sqrt{\frac{2W}{m}} \int dw \mathfrak{C} \wp w e^{-ij(\varepsilon \mathfrak{S} \sin w - w)}. \end{array} \right.$$

Aus Gleichung (34a) und (36) zeigt man leicht, daß in der Tat:

$$2\pi \nu a = j \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

ist. Die Integrale auf der rechten Seite von (37) sind Hankel'sche Zylinderfunktionen. Durch die Substitution $w = i\nu$ bringen wir sie auf Sommerfelds Normalform¹⁾:

$$(38) \quad H_a^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int d\nu e^{-i x \sin \nu + i \nu \nu}.$$

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 169, Leipzig 1909.

Es wird zunächst:

$$(39) \quad \begin{cases} \xi_v = -j \sqrt{\frac{2W}{m}} \int dv e^{j(\epsilon \sin v - v)} \frac{e^{i v} - e^{-i v}}{2} \\ \eta_v = -ij \sqrt{\epsilon^2 - 1} \sqrt{\frac{2W}{m}} \int dv e^{j(\epsilon \sin v - v)} \frac{e^{i v} + e^{-i v}}{2} \end{cases}$$

Der Integrationsweg kann dabei etwa parallel der imaginären v -Achse im Abstand $-\frac{\pi}{2}$ von $+i\infty$ bis $-i\infty$ geführt werden.

Durch Vergleichung von (38) und (39) ergibt sich:

$$(40) \quad \begin{cases} \xi_v = -\pi j \sqrt{\frac{2W}{m}} [H_{ij-1}(ij\epsilon) - H_{ij+1}(ij\epsilon)] \\ \eta_v = -\pi ij \sqrt{\frac{2W}{m}} [H_{ij-1}(ij\epsilon) + H_{ij+1}(ij\epsilon)] \end{cases}$$

Den oberen Index 1 lassen wir weg, da stets nur Hankelsche Funktionen erster Art vorkommen. Diese Formeln entsprechen den Koeffizienten der Fourierentwicklung der Keplerellipse.

§ 4. Mittelbildung für die Intensitäten

Mit Hilfe der soeben aufgestellten Formeln können wir nunmehr die Ausstrahlung berechnen. Entsprechend den Ausführungen des § 1 suchen wir neben der ausgestrahlten Gesamtenergie insbesondere denjenigen Teilbetrag, der von der Komponente der Beschleunigung in der Asymptotenrichtung emittiert wird. Dazu denken wir uns ein neues Koordinatensystem $x'y'z'$ so gelegt, daß die x - und die x' -Achse den Winkel φ_0 bilden, d. h. daß die x' -Achse in die Richtung A fällt (vgl. Fig. 1). Die Beschleunigungskomponente ξ_v' in dieser Richtung wird dann:

$$(41) \quad \xi_v' = (\xi_v \cos \varphi_0 + \eta_v \sin \varphi_0).$$

Für die von dieser Beschleunigung herrührende Ausstrahlung gilt aber:

$$(42) \quad J_{\xi_v'} = \frac{2e^2}{3c^3} \xi_v'^2 = \frac{2e^2}{3c^3} (\xi_v \cos \varphi_0 + \eta_v \sin \varphi_0)^2.$$

Diese Gleichung gilt für eine Bahn mit einer gegebenen Exzentrizität ϵ oder was, wie in Teil I dasselbe ist, für einen bestimmten Abstand ρ des ablenkenden Atomkerns von der Anfangsrichtung des Elektrons. Über diese Abstände ist nun-

mehr zu mitteln. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegt, ist gegeben durch:

$$(43) \quad \frac{2\pi \varrho d\varrho}{Q} = \frac{2\pi a^2}{Q} \varepsilon d\varepsilon.$$

Diese Beziehung haben wir ebenfalls bereits in Teil I, Gl. (17) abgeleitet. Damit und mit Hilfe der Gleichung (2) können wir für den Mittelwert über (42) schreiben:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{J}_{\varepsilon'} &= \frac{4\pi e^2 a^2}{3 Q c^3} \int_1^\infty \varepsilon d\varepsilon \left(\xi_v^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \eta_v^2 + \frac{2}{\varepsilon^2} \xi_v \eta_v \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right). \end{aligned} \right.$$

Wir setzen sogleich daneben den Mittelwert der Gesamtausstrahlung, der nach (33) und (43) wird:

$$(45) \quad J'_v = \frac{8\pi e^2 a^2}{3 Q c^3} \int_1^\infty \varepsilon d\varepsilon (\xi_v^2 + \eta_v^2).$$

Die Integration ist zu erstrecken von 1 bis ∞ , da ε sich in diesem Bereich ändert, wenn ϱ von 0 bis ∞ variiert.

Für das weitere führen wir folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

$$(46) \quad \Phi_v = \int_1^\infty \varepsilon d\varepsilon (\xi_v^2 + \eta_v^2)$$

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_v &= \int_1^\infty \varepsilon d\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \xi_v^2 + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \eta_v^2 \right] \\ \chi_v &= \int_1^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \xi_v \eta_v \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \end{aligned} \right.$$

so daß unsere Intensitätsformeln (44) und (45) die Form annehmen:

$$(48) \quad J_{\varepsilon'} = \frac{4\pi e^2 a^2}{3 Q c^3} (\psi_v + 2\chi_v),$$

$$(49) \quad J'_v = \frac{8\pi e^2 a^2}{3 Q c^3} \Phi_v.$$

In (46) und (47) sind die Ausdrücke für ξ_v und η_v aus Gleichung (40) einzusetzen. Macht man Gebrauch von der für Zylinderfunktionen gültigen Relation:

$$(50) \quad H_{\alpha+1}(x) + H_{\alpha-1}(x) = \frac{2\alpha}{x} H_{\alpha}(x),$$

d. h. in unserem Fall:

$$(51) \quad \varepsilon [H_{ij-1}(ij\varepsilon) + H_{ij+1}(ij\varepsilon)] = 2H_{ij}(ij\varepsilon),$$

so ergibt sich (Φ_v und ψ_v schon bei Wentzel a. a. O.):

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_v &= \pi^2 j^2 \frac{W}{m} \int_1^{\infty} \varepsilon d\varepsilon [H_{ij-1}^2(ij\varepsilon) + H_{ij+1}^2(ij\varepsilon) - 2H_{ij}^2(ij\varepsilon)] \\ \psi_v &= \pi^2 j^2 \frac{2W}{m} \left[\int_1^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} [2H_{ij}^2(ij\varepsilon) - H_{ij-1}(ij\varepsilon)H_{ij+1}(ij\varepsilon)] \right. \\ &\quad \left. - \int_1^{\infty} \varepsilon d\varepsilon H_{ij}^2(ij\varepsilon) \right]. \end{aligned} \right.$$

$$\chi_v = i\pi^2 j^2 \frac{W}{2m} \int_1^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - 1) [(H_{ij-1}(ij\varepsilon) + H_{ij+1}(ij\varepsilon)) \\ (H_{ij-1}(ij\varepsilon) - H_{ij+1}(ij\varepsilon))].$$

χ_v läßt sich mit Hilfe der weiteren für Hankelsche Funktionen gültige Relation:

$$(53) \quad \frac{dH_{\alpha}(x)}{dx} = \frac{1}{2} (H_{\alpha-1}(x) - H_{\alpha+1}(x))$$

noch in folgender Weise vereinfachen:

$$(54) \quad \chi_v = i\pi^2 j^2 \frac{W}{2m} \left\{ \frac{2H_{ij}^2(ij)}{ij} - \int_1^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} (H_{ij-1}^2(ij\varepsilon) - H_{ij+1}^2(ij\varepsilon)) \right\}.$$

Die Integrale in (53) und (54) lassen sich auswerten mit Hilfe der Formeln von Lommel¹⁾, so daß man schließlich erhält:

$$(55) \quad \Phi_v = \pi^2 j^2 \frac{2W}{m} H_{ij}(ij) [H_{ij-1}(ij) - H_{ij}(ij)]$$

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_v &= \pi^2 j^2 \frac{2W}{m} \left\{ (H_{ij-1}(ij) - H_{ij}(ij))^2 + \frac{1}{ij} H_{ij}^2(ij) \right. \\ &\quad \left. + H_{ij-1}(ij) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} H_{\alpha}(ij) \right)_{\alpha=ij} - H_{ij}(ij) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} H_{\alpha}(ij) \right)_{\alpha=ij-1} \right\} \end{aligned} \right.$$

1) Nielsen, Handb. d. Th. d. Zylinderfunktionen, S. 84, Gl. (3), Leipzig 1904; Jahke-Emde, a. a. O., S. 166.

$$(57) \left\{ \begin{aligned} \chi_v = & -ij^2 \pi^2 \frac{W}{2m} \left\{ \frac{2}{ij} H_{ij}^2(ij) - \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{ij} \right) \right. \right. \\ & \left. \left[H_{ij}(ij) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} H_\alpha(ij) \right)_{\alpha=ij+1} - H_{ij+1}(ij) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} H_\alpha(ij) \right)_{\alpha=ij} \right] \right. \\ & - \left(1 + \frac{1}{ij} \right) \left[H_{ij-2}(ij) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} H_\alpha(ij) \right)_{\alpha=ij-1} \right. \\ & \left. \left. - H_{ij-1}(ij) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} H_\alpha(ij) \right)_{\alpha=ij-2} \right] + \frac{H_{ij+1}^2(ij) + H_{ij-1}^2(ij)}{j^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{(H_{ij-1}^2(ij) - H_{ij+1}^2(ij))}{ij} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Ausdrücke entwickeln wir nunmehr nach Potenzen von j . Für große Werte von j , mit welchen wir es hier hauptsächlich zu tun haben, eignen sich am besten die Formeln von Debye¹⁾, die wir nach Wentzel schreiben ($|y| \ll |x|$)

$$H_{x-y}^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n C_n(y) e^{i \frac{(n+1)2\pi}{3}} x^{-\frac{n+1}{3}},$$

wo

$$(58) \left\{ \begin{aligned} b_0 = & -\frac{1}{3\pi} 6^{1/3} \cdot 3^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) & b_1 = & -\frac{1}{3\pi} 6^{2/3} \cdot 3^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\ b_2 = & 0 & b_{n+3} = & -2(n+1)b_n \end{aligned} \right.$$

$$C_0(y) = 1 \quad C_1(y) = y \quad C_3(y) = \frac{y^3}{6} - \frac{y}{15}$$

$$C_4(y) = \frac{y^4}{24} - \frac{y^2}{24} + \frac{1}{280}$$

$$C_6(y) = \frac{y^6}{720} - \frac{7y^4}{1440} + \frac{y^2}{288} + \text{const.}$$

Zur Berechnung der Differentialquotienten nach α in ψ_v und χ_v haben wir, da in $\alpha = x - y$ nur y als variabel betrachtet wird, noch zu bilden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_0(y)}{\partial(-y)} &= 0 & \frac{\partial C_1(y)}{\partial(-y)} &= -1 & \frac{\partial C_3(y)}{\partial(-y)} &= -\frac{y^2}{2} + \frac{1}{15} \\ \frac{\partial C_4(y)}{\partial(-y)} &= -\frac{y^3}{6} + \frac{y}{12} \\ \frac{\partial C_6(y)}{\partial(-y)} &= -\frac{y^5}{120} + \frac{7y^3}{360} - \frac{y}{144}. \end{aligned}$$

Hiermit erhält man für (55), (56) und (57)

1) P. Debye, Math. Ann. 67. S. 535. 1909.

$$(59) \quad \begin{cases} \Phi_\nu = \pi^2 \frac{2W}{m} \left(b_0 b_1 + \frac{1}{5} b_0^2 j^{-1/2} \dots \right) \\ \psi_\nu = \pi^2 \frac{2W}{m} \left(\frac{2}{3} b_0 b_1 + \dots \right) \\ \chi_\nu = \pi^2 \frac{2W}{m} \left(\frac{b_1^2}{2} j^{-1/2} + \dots \right), \end{cases}$$

so daß schließlich aus (48) und (49) wird:

$$(60) \quad \bar{J}_{\nu} = \frac{16\pi^3 e^6 Z^3 W}{Q 3 m^3 c^3 V^4} \left(\frac{1}{3} b_0 b_1 + \frac{b_1^2}{2} j^{-1/2} + \dots \right)$$

$$(61) \quad \bar{J}_{\nu}' = \frac{16\pi^3 e^6 Z^3 W}{Q 3 m^3 c^3 V^4} \left(b_0 b_1 + \frac{1}{5} b_0^2 j^{-1/2} + \dots \right).$$

Da nach unserer klassischen Rechnung j den Frequenzen ν proportional ist, liefern diese Gleichungen die spektrale Verteilung der Energie über einen Frequenzbereich von 0 bis ∞ .

§ 5. Das Korrespondenzprinzip

Das Ziel des Korrespondenzprinzips bei den Linienspektren ist bekanntlich, eine Beziehung zu finden zwischen den nach der klassischen Fourierentwicklung auftretenden Oberschwingungen einer mehrfachperiodischen Bewegung und den beobachteten Quantenfrequenzen; es bezweckt die nur auf klassischem Wege berechenbare Intensität und Polarisation den quantentheoretischen Linien zuordnen können. Nachdem wir nun im vorhergehenden für die unperiodische Hyperbelbewegung der Verteilung von Intensitäten über die klassischen Frequenzen berechnet haben, bleibt uns noch übrig, die von Kramers und Wentzel (a. a. O.) angegebenen Wege zur Verallgemeinerung des Korrespondenzprinzips auf unperiodische Systeme zu bewerten. Der erstere unterscheidet scharf zwischen zwei Arten von Quantenprozessen: Erstens kann das Elektron, wenn es in ein Atom eindringt, unter Abgabe eines Teils seiner Energie, auf eine andere Hyperbelbahn übergehen und auf dieser das Atom wieder verlassen. Durch die Gesamtheit dieser Prozesse wird ein kontinuierliches Spektrum mit der Grenze $h\nu_0 = \frac{1}{2} m v^2$ emittiert. Zweitens kann aber das Elektron in eine stationäre Bahn des Atoms übergehen und wird dann eine Linie mit einer Frequenz größer als ν_0 aussenden. Die Intensität der klassischen Frequenzen $> \nu_0$ soll nun diesen Linien zugeordnet werden, während für den kontinuierlichen Teil des Spektrums

die quantentheoretische Intensitätsverteilung gleich der klassischen gesetzt wird. Andererseits wird aber die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs in einen stationären Zustand des Atoms beim Auftreffen schneller Elektronen auf neutrale Atome gleich 0 gesetzt, so daß als Beobachtungsergebnis die klassische Intensitätsverteilung bei $v = v_0$ abgeschnitten erscheinen soll.

Der andere, von Wentzel eingeschlagene Weg, zeichnet sich insbesondere aus durch seine Analogie zum Korrespondenzprinzip bei der Balmerserie. Da andererseits auch unsere bisherigen Ansätze darauf abzielten, die Ellipsenbewegung durch die Hyperbelbahn, die Fourierreihe durch das Fourierintegral zu ersetzen, so soll die Wentzelsche Methode jetzt noch etwas ausführlicher dargelegt werden.

Im Falle der Keplerellipse des Wasserstoffatoms mit der mechanischen Umlauffrequenz ω des Elektrons läßt sich \dot{v} als Funktion der Zeit durch die Fourierreihe darstellen:

$$(62) \quad \dot{v} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{v}_k e^{2\pi i k \omega t}.$$

Die vom Wasserstoffatom emittierte Quantenfrequenz ist:

$$(63) \quad \nu' = \frac{1}{h} (W_a - W_e) \quad (h = \text{Wirkungsquantum}),$$

wo W_a und W_e die Bahnenergie im Anfangs- bzw. Endzustand bedeutet und gegeben ist durch:

$$(64) \quad W_a = -\frac{R h Z^2}{n_a^2}, \quad W_e = -\frac{R h Z^2}{n_e^2}.$$

Hierbei ist R die Rydbergfrequenz, n_a und n_e die Quantenzahl des Anfangs- bzw. Endzustandes. Die klassischen Oberschwingungen werden nun den durch ihre Quantenzahlen definierten wahren Linien durch das Korrespondenzprinzip so zugeordnet, daß:

$$(65) \quad k = n_a - n_e = Z \sqrt{R h} \left(\frac{1}{\sqrt{-W_a}} - \frac{1}{\sqrt{-W_e}} \right)$$

ist.

Drücken wir noch ω durch die Bahnenergie W aus:

$$(66) \quad \omega = \frac{2 R}{Z} \sqrt{\left(-\frac{W}{R h} \right)^3}$$

und bilden die Umkehrung von (62)

$$(67) \quad \dot{v}_k = \omega \int_0^{1/\omega} \dot{v} e^{-2\pi i k \omega t} dt,$$

so besagt die Forderung $h = n_a - n_e$, daß der Berechnung der Intensität und Polarisation einer Spektrallinie der Wert von \dot{v}_k zugrunde zu legen ist, der entsteht, wenn man im Exponenten von (67) setzt:

$$(68) \quad k\omega = v_{kl} = \frac{2}{h} \sqrt{-W^3} \left(\frac{1}{\sqrt{-W_e}} - \frac{1}{\sqrt{-W_a}} \right).$$

W ist dabei ein Mittelwert zwischen W_a und W_e .

Setzt man in Gleichung (68) $W_a = W_e + h\nu'$, so stellt sie bei festem W_e das gesuchte Gesetz der „Zusammenschiebung“ der klassischen Frequenzen dar.

Im unperiodischen Fall der Hyperbelbewegung war zur Darstellung von \dot{v} an Stelle der Fourierreihe von Gleichung (62) das Fourierintegral in Gleichung (25) getreten. Wenn wir uns nun auch hier auf den rein quantentheoretischen Standpunkt der Lichtemission stellen, so ist die Frequenz definiert durch den Übergang des Elektrons auf eine Keplerbahn geringerer Energie. Letztere ist aber dabei einfach gegeben durch die (positive) kinetische Energie des Elektrons. Wir fordern nunmehr mit Wentzel, daß die zur Berechnung der Intensitätsverteilung über die Frequenzen nötige Beziehung zwischen klassischen und Quantenfrequenzen (ν') in Analogie zum Wasserstofffall gegeben ist durch:

$$(69) \quad v_{kl} = \frac{2}{h} \sqrt{W^3} \left(\frac{1}{\sqrt{W_e}} - \frac{1}{\sqrt{W_a}} \right),$$

wobei noch einzusetzen ist $W_e = W_a - h\nu'$. Wie man sich leicht überzeugt, entspricht in (69) bei gegebenen W_a die klassische Frequenz $\nu = \infty$ der beobachteten Emissionsgrenze:

$$(70) \quad \nu_0 = \frac{W_a}{h}.$$

Unter Einführung dieser Beziehung in (69) erhält man:

$$(71) \quad v_{kl} = 2 \sqrt{\left(\frac{W}{h}\right)^3} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu_0 - \nu'}} - \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} \right).$$

Damit ist auch der Wert von j , der in (60) und (61) einzusetzen ist, bestimmt als:

$$(72) \quad j = Z\sqrt{R} \left(\frac{1}{\sqrt{\nu_0 - \nu'}} - \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} \right),$$

wobei R die Rydbergfrequenz ist mit dem Wert:

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}.$$

§ 6. Definition des Polarisationsgrades

Die Polarisation einer Röntgenstrahlung wird nach Barkla¹⁾ bekanntlich bestimmt durch die ungleiche Verteilung der von einem Sekundärstrahler gestreuten Intensität. Die Anschauung ist dabei die, daß im Sekundärstrahler Elektronen durch die auftreffenden transversalen Schwingungen beschleunigt werden und dann ihrerseits strahlen und zwar maximal senkrecht zur Schwingungsrichtung, minimal in derselben. Wenn also im Primärstrahl eine bestimmte Ebene durch den elektrischen Vektor bevorzugt ist, so wird die Sekundärstrahlenergie in der darauf senkrechten Richtung einen Höchstwert haben, bei Beobachtung parallel der Vorzugsrichtung des elektrischen Vektors ein Minimum. Die Streuung läßt man am besten an leichten Körpern (Paraffin, Pappe usw.) erfolgen, um nicht durch sekundäre Eigenstrahlung gestört zu werden. Die Definition des Polarisationsgrads auf Grund solcher Beobachtungen ist bei den verschiedenen Forschern keineswegs einheitlich, sondern immer ganz den Einzelheiten des jeweiligen Versuchs angepaßt. Im allgemeinen wird die Röntgenröhre um die Richtung des Primärstrahls drehbar angeordnet, und die gestreute Intensität mittels der Ionisationsmethode bestimmt. Dazu werden bei Barkla und Bassler in der Ebene senkrecht zum Primärstrahl zwei Kondensatoren A_1 und A_2 , die mit Elektrometern verbunden sind, in um 90° verschiedenen Richtungen angebracht. Die Röntgenröhre wird zuerst so gestellt, daß die Kathodenstrahlrichtung der Richtung eines der beiden beobachteten Sekundärstrahlen parallel ist, dann der Radiator eine gewisse Zeit t bestrahlt und die Ausschläge x_1 bzw. x_2 der beiden Elektrometer beobachtet. Nach den Angaben Barklas soll nun die Röntgen-

1) C. G. Barkla, a. a. O.

röhre um 90° gedreht und der Radiator solange Zeit bestrahlt werden, bis das Elektrometer an A_1 denselben Ausschlag $y_1 = x_1$ wie vorher gibt. An A_2 werde jetzt der Ausschlag y_2 beobachtet. Als Maß der Polarisation (P) kann man dann den Wert von $\frac{y_1 - x_2}{x_1}$ betrachten. In der Arbeit von Bassler dagegen wird der Radiator auch mit der um 90° gedrehten Röhre dieselbe Zeit t wie bei der ersten Röhrenstellung bestrahlt, so daß an A_1 nunmehr der Ausschlag z_1 beobachtet werde. Definiert man dann als mittlere Sekundärintensität:

$$S = \frac{x_1 + z_1}{2}$$

und als Maß der Polarisation:

$$A = \frac{x_1 - z_1}{2},$$

so beträgt die Polarisation in Prozenten der mittleren Sekundärintensität:

$$P \frac{0}{0} = 100 \frac{x_1 - z_1}{x_1 + z_1}.$$

Kirkpatrick¹⁾ endlich verwendet überhaupt nur einen Kondensator und gibt einfach das Verhältnis der Elektrometerausschläge bei zwei um 90° verschiedenen Stellungen der Röhre und gleicher Belichtungsdauer an. Wir werden uns im folgenden bei der Diskussion unserer Rechnungsergebnisse an die Basslersche Definition anschließen.

§ 7. Diskussion

Wir bestimmen zuerst die Polarisation in Abhängigkeit von j (d. h. von den klassischen Frequenzen). Damit bleibt die Rechnung vorläufig noch von den in § 5 erwähnten verschiedenen Formulierungen des Korrespondenzprinzips unabhängig.

Aus Gleichung (60) und (61) folgt mit Hilfe von (72) sofort, daß für $j = \infty$

$$(73) \quad \frac{1}{3} \bar{J}_v = \bar{J}_{z'}$$

wird; mit anderen Worten: Die z' -Komponente der Beschleunigung \dot{v} liefert $\frac{1}{3}$ der Gesamtintensität. Der Rest wird infolge der Rotationssymmetrie der Emission um den Kathoden-

1) P. Kirkpatrick, Phys. Rev. 22. S. 226. 1922.

strahl zu gleichen Beträgen von den Beschleunigungen in der y' - und z' -Richtung erzeugt. Keine Richtung ist also durch den elektrischen Vektor bevorzugt, die Polarisation muß verschwinden (vgl. § 1). Für kleinere ν -Werte nimmt (infolge des kleineren Betrags des Exponenten von j in Gleichung (60) vgl. mit Gleichung (61)) $\overline{J_{z'\nu}}$ rascher zu als $\overline{J_\nu}$, die x' -Richtung wird also für den elektrischen Vektor Vorzugsrichtung auf Kosten der anderen. Um uns über den Verlauf dieses Polarisationsanstiegs von $j = \infty$ aus zu unterrichten, suchen wir die zu einigen Werten k_i des Verhältnisses $\overline{J_{z'\nu}}/\overline{J_\nu}$ gehörigen Werte von j zu bestimmen. ($1/3 < k < 1$). Wir bilden

zuerst: $\frac{\overline{J_{z'\nu}}}{\overline{J_\nu}} = k_1 = \frac{1}{2}$, d. h. die y' - und z' -Komponente von \vec{u}

liefere je noch $1/4 \overline{J_\nu}$. Denken wir uns die Beobachtungsrichtung mit der z' -Richtung (senkrecht zum Kathodenstrahl) zusammenfallend, so wird am Sekundärstrahler das Komponentenverhältnis $x:y = 2:1$ beobachtet werden oder der Polarisationsgrad in Basslerscher Bezeichnung wird: $P = 33\frac{1}{3}$ Proz.

Nach Gleichung (60) und (61) erhält man:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{b_1}{b_0} j^{-1/3}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{b_0}{b_1} j^{-2/3}\right)$$

und daraus mit Hilfe der Werte von $b_0 = 0,89$ und $b_1 = 0,81$

$$j = 25,6.$$

Weiter bestimmen wir noch die Werte von j für:

$$\frac{\overline{J_{z'\nu}}}{\overline{J_\nu}} = k_2 = \frac{11}{20} \quad \text{Polarisation: 42 Proz.}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{b_1}{b_0} j^{-1/3}\right) = \left(\frac{11}{20} + 1,1 \frac{b_0}{b_1} j^{-2/3}\right) \quad j = 4,91,$$

$$\frac{\overline{J_{z'\nu}}}{\overline{J_\nu}} = k_3 = \frac{3}{5} \quad \text{Polarisation: 50 Proz.}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{b_1}{b_0} j^{-1/3}\right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{25} \frac{b_0}{b_1} j^{-2/3}\right) \quad j = 2,74,$$

$$\frac{\overline{J_{z'\nu}}}{\overline{J_\nu}} = k_4 = \frac{2}{3} \quad \text{Polarisation: 60 Proz.}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{b_1}{b_0} j^{-1/3}\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{15} \frac{b_0}{b_1} j^{-2/3}\right) \quad j = 1,83.$$

Aus diesen Zahlen folgt, daß im klassischen Spektrum die Polarisierung von den unendlich großen Frequenzen aus relativ rasch auf einen hohen Betrag anwächst. Würde man nun den Übergang zu den Quantenfrequenzen in der Kramersschen Weise durch Abschneiden der zu großen Frequenzen vollziehen, so ergäbe sich eine in gewisser Weise von der Spannung abhängige Polarisierung der Grenzfrequenz. Um einen größenordnungsmäßigen Überblick zu bekommen, betrachten wir etwa einen Spektralbereich, wie er den Kuhlenskampffschen (a. a. O.) Messungen entspricht. ($\nu \cong 10^{18} \text{ sec}^{-1}$ Spannung $\sim 10000 \text{ Volt}$). Dem ν der Grenze entspricht in Kramersscher Berechnung ein j -Wert von etwa 1,5—3. Dies entspricht, wie man sieht, schon einer Polarisierung von 40 bis 60 Proz., die für die kleineren ν -Werte wahrscheinlich auf praktisch 100 Proz. steigen würde. Genaueres kann wegen der in diesem Bereich schlechten Konvergenz der Debyeschen Entwicklungen aus unseren Formeln nicht abgelesen werden.

Um andererseits die j -Werte nach Wentzel auf die zugehörigen Quantenfrequenzen umzurechnen, dient Gleichung (72). Hierin entspricht dem Wert $j = \infty$ die Grenzfrequenz ν_0 . Jetzt erscheint also die Grenze unpolarisiert. Weiter folgt, daß der Polarisationsanstieg von der Röhrenspannung und der Atomnummer des Antikathodenmaterials abhängt. Die quantitative Art dieser Abhängigkeit wird am deutlichsten aus der folgenden Fig. 3, wo als Abszisse die Frequenzen ν und als Ordinate der Polarisationsgrad aufgetragen ist. Bei jeder der vier Spannungen 7000 Volt, 10000 Volt, 15000 Volt, 20000 Volt sind die Kurven für die drei Elemente Al ($Z = 13$), Cu ($Z = 29$), Ag ($Z = 47$) als Antikathodenmaterial berechnet. Charakteristisch ist das außerordentlich rasche Wachsen der Polarisierung auf den relativ hohen Wert von z. B. 40 Proz. Weiter ergibt sich, daß mit steigender Atomnummer und zunehmender Spannung die Polarisierung von der Grenze aus langsamer anwächst. Die letztere Erscheinung, d. h. die Spannungsabhängigkeit ist ausschließlich eine Folge der von uns gewählten Form des Korrespondenzprinzips und hat mit dem mechanischen Vorgang der Elektronenbewegung keinen Zusammenhang. Durch Gleichung (72) wird ja gewissermaßen der (eindimensionale) klassische Frequenzbereich von $\nu = 0$ bis

$\nu = \infty$ auf den Teilbereich zwischen $\nu' = 0$ und $\nu' = \nu_0$ abgebildet. Je kleiner also die Röhrenspannung ist, desto kleiner wird ν_0 und desto mehr erscheinen die klassischen Frequenzen zusammengedrängt. Daraus ergibt sich aber notwendigerweise der Eindruck eines rascheren Polarisationsanstiegs.

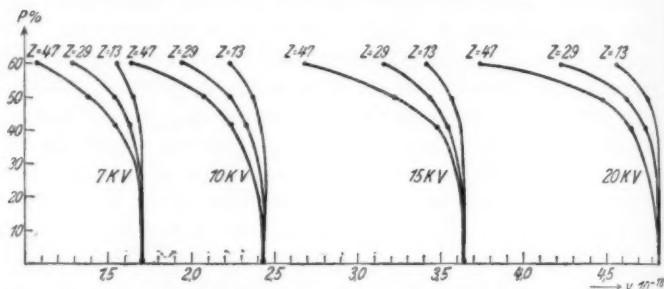


Fig. 3. Frequenzabhängigkeit des Polarisationsgrades von Spannung und Antikathodenmaterial

Einen besseren Überblick über den experimentell zu erwartenden Befund wollen wir aber noch dadurch geben, daß wir von den Schwingungszahlen zu den Wellenlängen λ übergehen. Wir ändern die vorige Fig. 3 also derart ab, daß wir als Abszisse $\lambda = \frac{c}{\nu}$ auftragen, Fig. 4. Nunmehr bewirkt

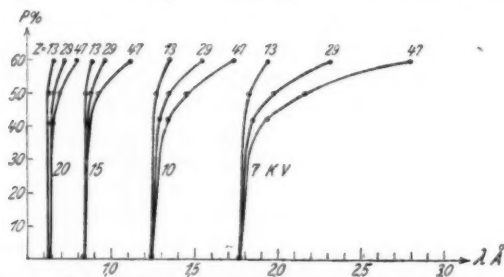


Fig. 4. Wellenlängenabhängigkeit des Polarisationsgrades von Spannung und Antikathodenmaterial

wachsende Spannung und abnehmendes Atomgewicht der Antikathode einen rascheren Polarisationsanstieg. In einer weiteren Fig. 5 tragen wir als Ordinate die Abstände derjenigen

Wellenlängen von der betreffenden Grenzwellenlänge auf, für die der Polarisationsgrad 60 Proz. beträgt. Abszisse ist die Spannung in Volt. Daraus ist nunmehr für beliebige Spannungen der Polarisationsanstieg leicht abzulesen.

Unsere Fig. 4 und 5 werden der Wirklichkeit insofern noch nicht gerecht, als wir bis jetzt immer angenommen haben, daß jedes Elektron im ersten Atom, auf das es auftrifft, zur Emission eines Röntgenimpulses kommt. Dies wird aber nur in wenigen Fällen zutreffen — selbst unter der von uns gemachten Annahme einer dünnen Antikathode —, sondern im allgemeinen wird ein Elektron vor der Umsetzung seiner kinetischen Energie in Strahlung zuerst eine Anzahl von Atomen

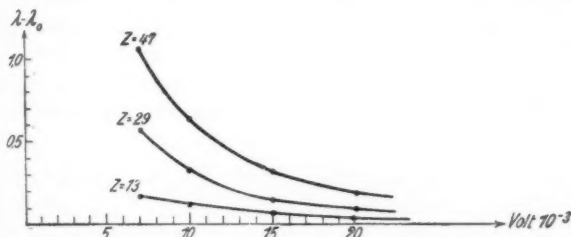


Fig. 5. Entfernung von der Grenze der 60proz. Polarisation

strahlungslos durchsetzen. Es ist daher möglich, daß es vor der Emission seine Anfangsrichtung in beliebiger Weise ändert. Dadurch wird die Eigenschaft der Kathodenstrahlrichtung, Vorzugsrichtung der emittierenden Elektronen zu sein, verwischt. Dies hat aber notwendigerweise eine Herabminderung der Polarisation zur Folge, die vielleicht auch noch irgendwie frequenzabhängig ist. Wir erwarten daher, daß die Kurven der Fig. 4 bei der Beobachtung im ganzen heruntergerückt werden. Über diesen Betrag der Verzerrung können wir natürlich schwerlich theoretische Voraussagen machen.

Zur Prüfung der Theorie gibt es zurzeit noch keine ausreichenden experimentellen Beobachtungen. Kirkpatrick (a. a. O.) hat bei den größeren Wellenlängen des Spektrums einen Anstieg der Polarisation nach der Grenze hin beobachtet; doch hat dieser Anstieg offenbar nichts mit dem von uns hier vorausgesagten Effekt zu tun, sondern rührt ver-

mutlich von dem Einfluß der Diffusion der Kathodenstrahlen her. Da Kirkpatrick aber mit sehr hohen Spannungen (etwa 25—60000 Volt) arbeitete und mit seiner Methode den Bereich in unmittelbarer Nähe der Grenze nicht analysieren konnte, mußte ihm der uns wesentlich interessierende, starke Polarisationsabfall an der Grenze entgehen. Nur eine Messung an weichen Röntgenstrahlen mit schwerer Antikathode könnte möglicherweise darüber experimentellen Aufschluß geben, der dadurch von besonderer Bedeutung wäre, daß auf diese Weise darüber experimentellen Aufschluß geben, der dadurch von besonderer Bedeutung wäre, daß auf diese Weise eine Entscheidung zwischen den Formulierungen des Korrespondenzprinzips von Kramers und Wentzel möglich würde. Allerdings darf auch nicht unerwähnt bleiben, daß die Schwierigkeiten, die sich im ersten Teil unserer Arbeit zeigten (vgl. S. 503), auch hier sich möglicherweise noch geltend machen, und vielleicht später eine teilweise Umgestaltung der Theorie erfordern.

Auch an dieser Stelle möchte ich nicht versäumen, meinen hochverehrten Lehrern Hrn. Geh. Rat Prof. Dr. Sommerfeld und Hrn. Privatdozent Dr. G. Wentzel für die Anregung zu dieser Arbeit und die mannigfachen Ratschläge bei der Ausführung derselben, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 31. Juli 1926)

4. *Über die Temperaturabhängigkeit
der Dielektrizitätskonstante
von Quarz, Flußspat und Gips;
von Albrecht Dieterich*

(Kieler Dissertation)

Während die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von Gasen und Flüssigkeiten den Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gebildet hat, ist das Beobachtungsmaterial, das über das entsprechende Verhalten bei festen Körpern vorliegt, äußerst dürftig und teilweise sehr unsicher. Noch am häufigsten untersucht sind Körper, die wie Glas, Glimmer, Hartgummi, Paraffin als Isolatoren ein gewisses technisches Interesse beanspruchen können, während andere, wohl definierte, wie es insbesondere Kristalle sind, fast gar keine Bearbeitung erfahren haben. Die nachstehende kleine Tabelle umfaßt wohl so ziemlich sämtliche dielektrische Temperaturkoeffizienten der bisher untersuchten festen Körper (s. Tab. 1).

Wenngleich es nicht zulässig ist, aus diesen spärlichen Angaben schon Schlüsse über das Verhalten der Dielektrizitätskonstante fester Körper zu ziehen, so sei doch darauf hingewiesen, daß bei allen untersuchten Substanzen eine Zunahme mit steigender Temperatur beobachtet worden ist, wobei allerdings bei zweien derselben, bei Paraffin und Quarz, auch gegenteilige Angaben vorliegen. Läßt man Paraffin als schlecht definierten Körper, bei dem unter Umständen auch eingeschlossene Luftblasen stören können, außer Betracht, so ist es nur die Hasenoehrlsche Angabe über Quarz, die eine Ausnahme zu liefern scheint; es sei jedoch schon jetzt hervorgehoben, daß sie nach meinen Messungen dem Sinn und der Größe nach unrichtig ist. Ferner ist zu bemerken, daß die an Glas gewonnenen Angaben eine deutliche Abhängigkeit des dielektrischen Temperaturkoeffizienten von der Ladungsdauer erkennen lassen, derart, daß bei länger einwirkender Ladung

Tabelle 1

Beobachter	Temperatur- bereich von bis Grad	Fre- quenz	Ladungs- zeit Sek.	Glas	Ebonit	Paraffin	Glimmer	Quarz	Schwefel
W. Cassie ¹⁾ . . .	20 70	—	0,02	$2,5 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—
M. Bouty ²⁾ . . .	— 0 400	—	0,01	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$	—	—
H. Pellat und P. Sacerdote ³⁾ . .	10 20	—	0,01 bis 1	—	—	—	$< 10^{-4}$	—	—
Curie u. J. Compan ⁴⁾ .	— 185 + 13	—	∞	—	$8,8 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	—	—	—
A. Wöllner und M. Wien ⁵⁾ . . .	0 30	—	0,05	$1 \cdot 10^{-2}$ $8 \cdot 10^{-4}$	—	—	—	pos. Wert	—
F. Hasenoechl ⁶⁾ . .	10 30	—	10	$5,3 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—
E. Mattenklodt ⁷⁾ . .	0 50	60	1	$3 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—
F. Schmidt ⁸⁾ . . .	— 140 + 140	?	—	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$< 3 \cdot 10^{-6}$	$- 1 \cdot 10^{-3}$	—
H. Joachim ⁹⁾ . . .	— 180 + 17	10^8	∞	—	—	—	—	—	$2 \cdot 10^{-4}$ kristall. $< 2 \cdot 10^{-6}$ amorph.
S. Gagnebin ¹⁰⁾ . .	220 300	?	—	—	—	—	—	großer pos. Wert	—

1) W. Cassie, Phil. Trans. 181. A. 1. 1890.

2) M. Bouty, Ann. d. Chim. et d. Phys. 24. S. 394. 1891.

3) H. Pellat u. P. Sacerdote, C. rend. 127. S. 544. 1898.

4) J. Curie u. J. Compan, C. rend. 134. S. 1285. 1902.

5) A. Wüllner und M. Wien, Ann. d. Phys. 9. S. 1217. 1902.

6) F. Hasenoechl, Wien, Ber. Math.-Naturw. Klasse 106.

7) E. Mattenklodt, Ann. d. Phys. 27. S. 359. 1908.

8) F. Schmidt, Ann. d. Phys. 44. S. 329. 1914.

9) H. Joachim, Ann. d. Phys. 60. S. 591. 1919.

10) S. Gagnebin, C. R. soc. suisse d. Phys. 1923.

die Zunahme größer ist. Ähnliches hat Errera¹⁾ auch für andere Dielektrika in der Nähe ihres Schmelzpunktes gefunden. Ob dies allgemein zu erwarten ist, läßt sich natürlich nicht sagen; doch deuten die Versuche von Schweidler²⁾, die eine Vergrößerung der Rückstandsbildung mit steigender Temperatur ergeben, darauf hin, daß man den Temperaturkoeffizienten der Dielektrizitätskonstante wahrscheinlich kleiner und richtiger bestimmt, wenn man bei der Messung Rückstandsbildung vermeidet.

Im folgenden werde kurz über diesbezügliche Messungen berichtet, die ich an gut ausgebildeten Quarz-, Flußpat- und Gipskristallen angestellt habe. Zur Erprobung der Methode wurde außerdem Glas als das Material, über das bisher die meisten Angaben vorliegen, mit untersucht.

Meßmethode und Versuchsanordnung

Um nicht durch Rückstandsbildung gestört zu werden, empfiehlt es sich, mit hochfrequenter Wechselspannung zu arbeiten. Hierzu eignet sich einmal die Verwendung der Brückenordnung, wie sie hauptsächlich von Nernst und seinen Schülern³⁾ auch für Hochfrequenzmessungen ausgebildet worden ist; bei der Kleinheit der zu erwartenden Änderungen dürfte sie nur bei Anwendung großer Temperaturdifferenzen mit Vorteil brauchbar sein. Will man mit kleinen Temperaturerhöhungen auskommen, so ist eine Messung durch Resonanzeinstellung zwischen zwei durch Elektronenröhren betriebenen Schwingungskreisen wegen der außerordentlichen Empfindlichkeit bei Benützung des Überlagerungsverfahrens entschieden noch günstiger. Es wurde daher diese zweite Methode gewählt. Von einer ins einzelne gehenden Beschreibung kann angesichts der ausführlichen Literatur⁴⁾ Abstand

1) M. J. Errera, Journ. d. Phys. 5. S. 304. 1924.

2) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. 24. S. 759. 1907.

3) Vgl. z. B. H. Joachim, a. a. O.

4) L. Pungs und G. Preuner, Phys. Ztschr. 20. S. 543. 1919; J. Herweg, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 572. 1919; G. Falkenberg Ann. d. Phys. 61. S. 167. 1920; W. Hammer, Ber. Naturf. Ges. Freiburg 22. S. 2. 1920; E. Grüneisen und E. Merkel, Ztschr. f. Phys. 2. S. 277. 1920.

genommen werden; nur auf das Prinzip und Einzelheiten, die durch den besonderen Zweck bedingt sind, möge hingewiesen werden.

Zwei einander möglichst gleichgemachte, mit Elektronenröhren ρ_1 und ρ_2 in Spannungsteilerschaltung betriebene Schwingungskreise I und II liefern ungedämpfte Schwingungen (vgl. Fig. 1). Die Selbstinduktionsspulen L_1 und L_2 seien dabei tunlichst gleichgemacht (auch bezüglich ihrer Eigenkapazitäten). Die Kapazität des Kreises II bildet der „Untersuchungskondensator“ C_2 , der das zu untersuchende Dielektrikum enthält; er befindet sich

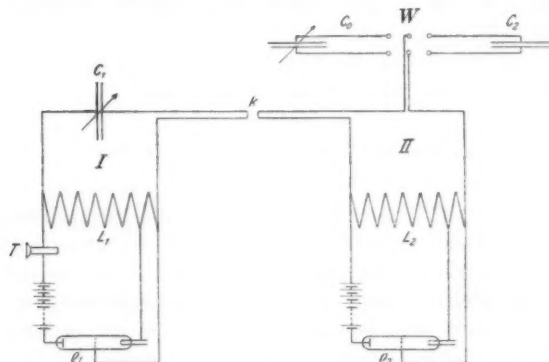


Fig. 1

in einem Thermostaten. Kreis I enthält den „Meßkondensator“ C_1 , der sehr fein meßbar verändert werden kann. Beide Kreise sind bei k lose gekoppelt. Es entsteht also eine Überlagerungsschwingung, so daß bei entsprechender Differenz der Frequenzen in einem an geeigneter Stelle eingeschalteten Telephon T ein Schwebungston gehört wird. Nach dem Vorgang von Herweg empfiehlt es sich, diesen (nicht zu tiefen) Ton nochmals mit einem Summertone festgehaltener Höhe zu Schwebungen zu bringen. Hierdurch erreicht man eine sehr genaue Einstellung auf das Minimum der akustischen Schwebungen.

Wird jetzt die Temperatur im Thermostaten erhöht und hierdurch die Kapazität des Untersuchungskondensators geändert, so treten Schwebungen des Telephontones gegen den Summertone auf. Ist etwa die Frequenz des Untersuchungskreises

400 000 — diese Frequenz wurde u. a. angewandt — und ändert sie sich um $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{400\,000}$, so wird nach dieser Änderung $\Delta n = 1$ Schwbg./sec gehört werden. Die Methode mißt also die relative Frequenzänderung $\frac{\Delta n}{n}$; man kann aus ihr auf die entsprechende Kapazitätsänderung schließen nach der Beziehung

$$\frac{\Delta n}{n} = - \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \quad 1)$$

Die Änderung der Tonhöhe wurde durch eine entsprechende am Meßkondensator vorgenommene und abgelesene, relative Kapazitätsänderung $\frac{\Delta C}{C}$ kompensiert. Man erhält so bei ursprünglich völliger Gleichheit der Kreise unmittelbar den gesuchten Wert

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Da von der Erwärmung des zu untersuchenden Dielektrikums bis zur Erreichung genügender Temperaturkonstanz eine lange Zeit erforderlich war — eine Messung zwischen zwei Temperaturen nahm etwa 3 Stunden in Anspruch — so konnte die bei der Anfangstemperatur erfolgte Abstimmung der beiden Systeme nicht vollkommen aufrecht erhalten werden, indem in dieser Zeit Frequenzänderungen von einigen Zehntelpromille unvermeidlich waren. Diesem Umstand wurde dadurch Rechnung getragen, daß der Kondensator mit dem zu erwärmenden Dielektrikum mittels der Wippe *W* ersetzt werden konnte durch eine auf konstanter Temperatur gehaltene Kapazität C_0 , die ihm zu Beginn der Messung gleichgemacht worden war. Dieselbe bestand aus einem sehr stabil nach dem Modell der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt gebauten Luftkondensator²⁾, dem zur Abstimmung ein sehr großer, vorzüglicher Seibtscher Drehkondensator vorgeschaltet war.

1) Die Frequenz eines durch einen Röhrensender angeregten Schwingungskreises ist durch die Thomsonformel zwar nur angenähert bestimmt; die Annäherung ist jedoch hinreichend, um nicht zu große Kapazitätsänderungen aus ihr zu berechnen.

2) E. Giebe, Ztschr. f. Instrumentenkunde 29. S. 278. 1909.

Letzterem lag noch zur Feinabstimmung ein sehr viel kleinerer parallel geschaltet. Es wurde also die Kapazitätsänderung des Kondensators, der das zu erwärmende Dielektrikum enthielt, immer gemessen gegen ein System, das gegen den Schwingungskreis mit der erwähnten Präzisionskapazität abgeglichen war. Auf diese Weise konnte eine für die gegebenen Verhältnisse außerordentlich hohe Meßgenauigkeit erreicht werden.

Die größte Schwierigkeit der ganzen Untersuchung bestand aber darin, den Kondensator, der das zu erwärmende Dielektrikum aufnehmen sollte, so zu gestalten, daß nicht seine Kapazität beim Erhitzen durch unkontrollierbare Wirkungen der Umgebung beeinflußt wurde. Naheliegend war es, hierfür einen Dreiplattenkondensator zu verwenden, bei dem die innere Platte möglichst vollständig von dem Dielektrikum umgeben war, während die beiden äußeren „Schutzplatten“ mit den umgebenden Teilen der Thermostatenanordnung in gut leitender Verbindung standen. Die Konstruktion nach diesem Prinzip war unbedingt erforderlich, um überhaupt zum Ziel zu gelangen; indessen waren viele Versuche nötig, um vor allem die Zuführungen so zu verlegen, daß keine kapazitiven Störungen beim Erwärmen auftraten.

Im wesentlichen war die Anordnung folgendermaßen aufgebaut. Zwei durch beiderseitiges Versilbern mit Belegungen versehene Kristallplatten wurden abwechselnd mit Messingscheiben von etwas geringerem Durchmesser als dem der Belegungen übereinander gelegt, so daß jede Kristallplatte zwischen zwei Messingscheiben lag. Zwischen jeder Berührungsfläche lagen Stanniopolster, um einen sicheren Kontakt zwischen den Belegungen und den Messingscheiben zu erreichen. Ein Metallrahmen erlaubte die äußeren Metallscheiben in Führungen mittels einer Feder mit mäßigem Druck parallel gegeneinander zu pressen. Diese Vorrichtung stellt den geforderten Dreiplattenkondensator dar, dessen „äußere“ Belegungen durch den Metallrahmen in leitender Verbindung stehen. Der Metallrahmen war von innen direkt an den Deckel eines öldichten Messingkastens geschraubt, so daß alle leitenden Teile im Kasten gleiches Potential mit ihm hatten, außer der „inneren“ Platte und ihrer Zuführung. Diese wurde bewerkstelligt durch einen stabilen, dicken Kupferdraht, der isoliert durch ein

weites Ansatzrohr auf möglichst kurzem Wege zur mittleren Platte geführt war. Die äußeren Kondensatorbelegungen waren über den Schutzkasten geerdet.

Der Kasten selbst tauchte in ein als Thermostat dienendes großes Ölbad, dessen Temperatur durch elektrische Heizung erhöht und durch Rührer ausgeglichen wurde. Die Störungen waren schließlich so weit beseitigt, daß wiederholtes Zerlegen und Wiederausammensetzen der Apparatur keinen erkennbaren Einfluß auf die Meßresultate lieferte, obwohl es unmöglich war, die Versuchsverhältnisse immer ganz genau zu reproduzieren.

Selbstverständlich müssen die bei der Messung sehr kleiner Kapazitätsänderungen nötigen Vorsichtsmaßregeln auch bei der übrigen Apparatur angewandt werden. So war der dem Beobachter zugewandte „Meßkreis“ I mit allen seinen Teilen in einem großen geerdeten Blechkasten untergebracht, um ihn vor kapazitiver Beeinflussung durch den Beobachter zu schützen. Alle bei den Messungen nötigen Verstellungen an Kapazitäten konnten vom Beobachtungsplatz aus mittels Fernübertragungen geschehen, die zugleich eine sichere Ablesung erlaubten.

Die Kunstgriffe, die eine besonders gute Konstanz der Frequenzen ermöglichen, sind bei Herweg, insbesondere bei Grüneisen und Merkel¹⁾ so eingehend besprochen, daß auch hierüber auf diese Arbeiten verwiesen werden kann.

Die Untersuchungen wurden in verschiedenen Temperaturintervallen innerhalb eines Bereiches von 10—50 Celsiusgraden angestellt; die Frequenz der verwendeten Schwingungen war bei den meisten Versuchen etwa $6,4 \cdot 10^6$, gelegentlich auch 4 und $9,7 \cdot 10^5$. Innerhalb der Beobachtungsfehler ergaben sich die gemessenen Temperaturkoeffizienten als unabhängig von der mittleren Versuchstemperatur und von der Frequenz.

Das Material

1. Quarz. Quarz ist, wenn er klar ist, stets sehr rein. Die benutzten vollkommen klaren, quadratischen Platten von 4 cm Kantenlänge und von 1,5 mm Dicke waren von der Firma Voigt & Hochgesang, Göttingen, bezogen; sie stammen aus zwei linksdrehenden, unverzwillingten Kristallindividuen und sind senkrecht zur Achse geschnitten.

1) E. Grüneisen und E. Merkel, a. a. O.

2. Flußspat. Die verwendeten Flußspatplatten hatten ursprünglich als Schutzplatten für Zeiss'sche Thermoelemente¹⁾ gedient, wobei von einer größeren Anzahl die reinsten ausgewählt waren. Untersucht wurden im ganzen vier kreisförmige Platten von 4 cm Durchmesser und 2 mm Dicke; zwei von ihnen waren fast völlig klar und farblos, die beiden anderen an einigen Stellen von weißlichen Schleiern durchzogen, die wohl als Wachstumstörungen oder geringe Einlagerungen zu deuten sind; im übrigen waren auch diese Platten klar und durchsichtig. Da Flußspat im regulären System kristallisiert, spielt die Orientierung keine Rolle.

3. Gips. Aus einem großen, klaren Kristall aus Girgenti, den ich der Liebenswürdigkeit von Hrn. Professor Spangenberg verdanke, waren durch Spalten parallel der besten Spaltbarkeit (010) zwei Platten von 1 bzw. 2,5 mm Dicke hergestellt; ihre Flächen waren für kreisförmige Belegungen von 4 cm Durchmesser hinreichend groß.

4. Glas. Wie schon erwähnt, wurde Glas zum Ausprobieren der Meßmethode mituntersucht und zwar ein aus einer photographischen Platte hergestelltes Stück, Plattendicke 1 mm, ferner Glas mit besonders geringen Hysteresisverlusten — sogenanntes Minosglas²⁾ — von der gleichen Stärke.

Die Platten wurden, um einen möglichst einwandfreien Kontakt zu erhalten, nach dem bekannten Böttgerschen Verfahren versilbert und dann verkupfert. Bei geeigneter Schichtdicke lassen sich dann durch Absprengen mit einem scharfen Messer gut definierte Ränder erhalten. Bei den Gipsplatten war wegen der merklichen Wasserlöslichkeit des Materials eine Versilberung untunlich; daher mußten hier die Belegungen unter Zwischenschaltung von Stanniopolstern aufgepreßt werden. Vorher war durch Messungen an Flußspatplatten festgestellt worden, daß hierdurch die Größe des Temperaturkoeffizienten nicht beeinflußt wird; allerdings ist die Meßgenauigkeit in diesem Falle etwas geringer.

1) W. Voëge, *Physik. Ztschr.* 21. S. 288. 1920.

2) Von der Firma Schott, Jena, dankenswerterweise zur Verfügung gestellt.

**Berechnung der Messungen, Genauigkeit, Fehlerquellen
und Korrekturen**

Der Temperaturkoeffizient der Dielektrizitätskonstante ϵ werde in üblicher Weise definiert durch

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \epsilon}{\Delta \theta}$$

Ändern sich die Abmessungen des Kondensators beim Erwärmen nicht oder nur sehr wenig, so kann man $\Delta \epsilon / \epsilon$ durch $\Delta C / C$ ersetzen, bzw. bei Einführung der Frequenz n durch $2 \Delta n / n$. Der letzte Ausdruck erlaubt bequem die Genauigkeit abzuschätzen, mit der die Kapazitätsänderung gemessen wird, wenn man dazu die Tonhöhenänderung des Schwebungstones, den die beiden Systeme zusammen bei nicht völliger Abstimmung liefern, bestimmt.¹⁾ Bei meinen Messungen wurde direkt die Kapazitätsänderung ΔC gemessen und zwar auf $1 \cdot 10^{-3}$ cm. An und für sich macht es keine besonderen Schwierigkeiten, diese Einstellschärfe zu verzehnfachen, doch erwies sich dies als zwecklos in Anbetracht der geringen Genauigkeit, mit der die Temperaturdifferenz $\Delta \theta$ konstant gehalten werden konnte. Die Kapazität C des Kondensators vor dem Erhitzen war in einer Brückenschaltung bestimmt. Die Genauigkeit, mit der der ganze Temperaturkoeffizient erhalten wurde, schwankte natürlich mit seiner Größe; bei Glas und Flußspat, bei denen die günstigsten Bedingungen vorlagen, betrug sie etwa 2 Proz. Diese Angabe bezieht sich nur auf den Ausdruck, wie er sich ausschließlich aus den elektrischen und Temperaturmessungen zusammen ergibt.

Bei der hohen Empfindlichkeit des Überlagerungsverfahrens gegen Frequenzänderungen ist es nicht ganz ausgeschlossen, daß Änderungen der Leitfähigkeit der Dielektrika mit der Temperatur die Einstellungen beeinflussen konnten, indessen zeigten Isolationsmessungen bei den verwendeten Temperaturen, daß eine Einwirkung auf die Resonanzlage in meßbarem Betrage nicht vorhanden war.

Eine sehr merkbare Korrektur ist hingegen erforderlich, um den Einfluß der thermischen Ausdehnung des Dielektrikums auf die gemessene Kapazitätsänderung zu berücksichtigen. Ist α

1) Vgl. z. B. E. Grüneisen und E. Merkel, a. a. O.

der lineare Ausdehnungskoeffizient eines isotropen Dielektrikums, so wächst bei einer Erwärmung um ϑ Grad die Kapazität infolge der Vergrößerung der belegten Fläche und nimmt zugleich infolge der Abstandsvergrößerung der Belege ab, so daß ohne gleichzeitige Änderung der Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur die neue Kapazität

$$C' = C(1 + \alpha\vartheta)^2 / (1 + \alpha\vartheta) = C(1 + \alpha\vartheta)$$

wäre. Um also den wahren Wert des Temperaturkoeffizienten der Dielektrizitätskonstante zu erhalten, ist von dem direkt aus den Messungen ermittelten Temperaturkoeffizienten der Kapazität der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient der dielektrischen Substanz abzuziehen. Bei nichtisotropen Materialien sind natürlich die den Richtungen entsprechenden Koeffizienten zu benutzen.

Um ein Bild von der Übereinstimmung zu geben, die bei einem Material wie Flußspat zu erhalten war, mögen die Ergebnisse sämtlicher hieran gemachten Messungen mitgeteilt werden. Tab. 2 und 3 enthalten die Temperaturkoeffizienten, wenn der Untersuchungskondensator aus den beiden besten Platten zusammengesetzt war; die der Tab. 3 sind gewonnen, nachdem die Apparatur zerlegt und wieder neu zusammengesetzt war. Tab. 4 enthält die an den weniger klaren Platten gemessenen Koeffizienten, Tab. 5 schließlich die Werte, welche die Kombination einer besseren und einer weniger klaren Platte lieferte. Die Frequenz n war in allen Fällen dieselbe, nämlich angenähert $6,4 \cdot 10^6$.

Tabelle 2

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$
21,8	32,0	+ 2,20
21,8	31,4	2,27
23,6	28,9	2,22
23,6	28,4	2,25
23,6	27,8	2,26
34,4	50,7	2,23
34,4	47,8	2,26

Mittelwert = + 2,24

Tabelle 3

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$
20,4	27,3	+ 2,20
20,0	42,4	2,23
20,4	27,0	2,21
20,5	45,5	2,24
20,5	44,7	2,23
20,0	42,4	2,23

Mittelwert = + 2,235

Tabelle 4

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$
24,7	53,1	+ 2,07
24,7	50,3	2,04
24,7	49,4	2,01
25,9	49,5	2,03
25,9	47,7	2,04
25,9	45,1	2,02

Mittelwert = + 2,035

Tabelle 5

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$
21,5	43,0	+ 2,14
21,5	41,1	2,13
21,5	37,5	2,08
26,1	52,4	2,15
26,1	49,3	2,08
26,1	46,0	2,13

Mittelwert = + 2,12

Bei Anwendung des reineren Flußspats ergibt sich daher aus Tab. 2 und 3 ein Temperaturkoeffizient $2,24 \cdot 10^{-4}$; für den weniger klaren ist er, wie Tab. 4 zeigt, etwas geringer. Daß diese Differenz reell und offenbar auf Materialverschiedenheiten zurückzuführen ist, zeigt außer der guten Übereinstimmung der Einzelwerte noch der Umstand, daß nach Tab. 5 bei Kombination zweier auch äußerlich verschiedener Platten ziemlich genau der Mittelwert der beiden Sorten gefunden wird.

Um hieraus den Temperaturkoeffizienten der Dielektrizitätskonstanten zu erhalten, ist noch der thermische Ausdehnungskoeffizient $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5}$ in Abzug zu bringen, so daß für die reinere der beiden Sorten sich ergibt

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \vartheta}_{\text{Flußspat}} = + 2,05 \cdot 10^{-4}$$

In entsprechender Weise wurde gefunden für Gips:

Tabelle 6

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$
14,68	28,84	+ 4,06
14,68	27,98	3,80
19,00	29,64	3,91
19,00	28,63	4,08
17,60	29,58	4,01
21,10	32,05	4,14

Mittelwert = + 4,00

$$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} = + 4,00 \cdot 10^{-4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta \vartheta}_{\text{Gips}} = + 3,75 \cdot 10^{-4}$$

Trotz des größeren Wertes des Temperaturkoeffizienten war die Genauigkeit nur etwa halb so groß wie bei den Messungen an Flußspat, was auf den schon erwähnten Umstand, daß die Belegungen angepreßt werden mußten, zurückzuführen ist.

Bei Glas hingegen war die Meßgenauigkeit wieder ebenso gut wie bei Flußspat. Es wurde gefunden für das Glas unbekannter Herkunft:

Tabelle 7

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$
15,20	26,50	+ 3,05
15,52	26,65	3,10
17,18	28,23	3,06 $n = 4 \cdot 10^5$
17,10	26,80	3,00
20,90	30,66	3,05
15,20	27,64	3,08

Mittelwert = + 3,05

$$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} = + 3,05 \cdot 10^{-4} \text{ bzw. } \frac{1}{s} \frac{\Delta s}{\Delta \vartheta_{\text{Glas 1}}} = + 1,37 \cdot 10^{-4}.$$

Für das Schottische Minosglas wurde erhalten:

Tabelle 8

ϑ_1	ϑ_2	$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} \cdot 10^4$	n
11,60	22,00	+ 1,43	$4 \cdot 10^5$
11,30	24,35	1,45	$4 \cdot 10^5$
11,76	27,20	1,45	$4 \cdot 10^5$
11,40	23,20	1,45	$4 \cdot 10^5$
17,36	32,70	1,45	$1 \cdot 10^6$
12,20	24,23	1,46	$1 \cdot 10^6$

Mittelwert = + 1,447

$$\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta} = + 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ bzw. } \frac{1}{s} \frac{\Delta s}{\Delta \vartheta_{\text{Glas 2}}} = + 1,37 \cdot 10^{-4}.$$

Bei Quarz war der zu beobachtende Temperatureinfluß auf die Kapazität sehr viel kleiner, die Meßgenauigkeit entsprechend geringer. Aus zwanzig Meßreihen ergab sich, daß $\frac{1}{C} \frac{\Delta C}{\Delta \vartheta}$ zwischen + 1,7 und + $2,5 \cdot 10^{-5}$ liegen mußte. Da je-

doch die anzubringende Korrektur¹⁾ wegen Wärmeausdehnung schon $-2 \cdot 10^{-5}$ beträgt, so kann über den Temperaturkoeffizienten der Dielektrizitätskonstante mit Sicherheit nur so viel ausgesagt werden, daß er jedenfalls außerordentlich klein sein muß.

Dieses Ergebnis steht in starkem Widerspruch zu dem von Hasenoeuhl gefundenen, nach welchem Quarz einen recht beträchtlichen negativen dielektrischen Temperaturkoeffizienten $\left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \epsilon}{\Delta \vartheta} = -1 \cdot 10^{-3}\right)$ besäße. Da gerade Quarz ein so gut definiertes Material ist, so kann diese Unstimmigkeit durch verschiedenartige Beschaffenheit des verwendeten Quarzes nicht erklärt werden. Wahrscheinlich dürfte der Grund für die Abweichung darin liegen, daß Hasenoeuhl gerade bei der Quarzuntersuchung besonders kleine Kondensatoren benutzte (von etwa 7 cm Kapazität, während die von mir verwendeten 100 cm besaßen). Bei seiner Messung befand sich der betreffende Kondensator innerhalb eines Metallkastens, der als Wasserbad ausgebildet war. Über die Dimensionierung der ganzen Anordnung fehlen nähere Angaben; vielleicht ist die Annahme zulässig, daß die Ausdehnung der metallischen Hülle mit wachsender Temperatur kapazitive Beeinflussung hervorbrachte, die einen negativen Temperaturkoeffizienten der genannten Größe vortäuschte. Völlig ausgeschlossen ist jedenfalls, daß ein so hoher Koeffizient in meiner Anordnung bei den zahlreichen Versuchen der Beobachtung und Messung hätte entgehen können.

Eine Arbeit von Gagnebin²⁾, der ein Wachsen der Dielektrizitätskonstante auf das 2,8 fache zwischen 220° und 300° beobachtet und oberhalb 300° eine nahezu konstante Dielektrizitätskonstante gefunden hat, ist leider erst nach Fertigstellung dieser Arbeit zu meiner Kenntnis gelangt. So war es nicht mehr möglich, das Verhalten von Quarz bei höheren Temperaturen mit der hier benutzten Anordnung zu prüfen. Sicher ist jedenfalls auch in diesem Falle, daß, wenn ein so

1) Ausdehnungskoeffizient nach Landolt u. Börnsteins Tabellen senkrecht zur Achse $= 1,37 \cdot 10^{-5}$, parallel dazu $= 7,4 \cdot 10^{-6}$. Da die Platte senkrecht zur Achse geschnitten war, ergibt sich obige Korrektur.

2) S. Gagnebin, a. a. O.

großer Temperaturkoeffizient auch bei niederen Temperaturen bestünde, er der Beobachtung nicht hätte entgehen können.

Zu den von mir bestimmten dielektrischen Temperaturkoeffizienten von Glas ist noch zu bemerken, daß sie tiefer liegen als die von anderen Beobachtern; wahrscheinlich erklärt sich dies durch die Verwendung hochfrequenter Wechselströme bei meinen Messungen, während sonst erhebliche Ladungszeiten gebraucht waren. Dafür spricht auch, daß Curie und Compan eine beträchtliche Abnahme mit der Verkleinerung der Ladezeit konstatiert haben. Ferner ist bemerkenswert, daß das Schottsche Minoglas, welches sich durch geringe dielektrische Verluste auszeichnet, nur einen halb so großen Temperaturkoeffizienten besitzt als das andere von mir untersuchte Glas.

Die vorliegende Untersuchung wurde im Physikalischen Institut der Universität Kiel auf Veranlassung von Hrn. Professor Zahn ausgeführt; ihm, sowie dem damaligen Direktor Hrn. Geheimrat Dieterici, bin ich für mannigfache Unterstützung zu herzlichem Dank verpflichtet. Gleichfalls schulde ich Dank der Schleswig-Holsteinischen Universitätsgesellschaft für die Mittel, die sie zur Beschaffung von Untersuchungsmaterial zur Verfügung gestellt hat, sowie Hrn. Obergeringieur Simon für die leihweise Überlassung von Präzisionskondensatoren und sonstigen Hilfsapparaten.

(Eingegangen 29. Juli 1926)

en

fi.

en

ch

bei

en

an

e.

as

he

r.

s.

en

o.

or

r.

le

ft

g.

ur

l.